UNTERSUCHUNG

DER

ELASTICITÄTSVERHÄLTNISSE DES STEINSALZES.

INAUGURAL-DISSERTATION

BEHUFS

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER KÖNIGL. ALBERTUS-UNIVERSITÄT ZU KÖNIGSBERG IN PR.

VORGELEGT

UND AM 21. MÄRZ 1874 VORMITTAGS 12 UHR

ÖFFENTLICH VERTHEIDIGT

VON

WOLDEMAR VOIGT.

OPPONENTEN:

J. PERNET, Cand. Phys.
G. H. FLEISCHER, Cand. Math.

LEIPZIG

DRUCK VON E. PÖSCHEL & CO.

2 A 87

4° Lit. 181 b

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Berichtigungen.

Da der Verfasser sich in Königsberg befand, während der Druck (und zwar in grosser Eile) in Leipzig ausgeführt wurde, so konnte die Correctur namentlich der letzten Bogen nicht mit der nothwendigen Sorgfalt behandelt werden. Es sind die folgenden Aenderungen nachträglich anzubringen:

Seite	Spalte	Zeile	
III	I	22 v. o.	*lies* Huyghens *statt* Huggheus.
	II	11 v. u.	*lies* Hemiëdrie *statt* Hermiedrie.
VII	I	31 v. o.	*schalte nach* sehr *ein* (ja vielleicht unendlich).
3	I	10 v. u.	*lies* gleich sind *statt* gleich ist.
6	I	14 v. o.	*lies* $\frac{B+A}{2}$ und $\frac{B-A}{2}$ *statt* $\frac{B+A}{2}$ und $\frac{B+A}{2}$.
7	II	9 v. u.	*setze* ; *statt* , .
10	I	1 v. u.	*lies* $\frac{a}{4x}$ *statt* $\frac{d}{4x}$.
17			*setze in der 6. Breitemessung* 4313 *statt* 4213.
26	II	23 v. o.	Die aufgeführten elastischen Biegungen sind nicht die direct beobachteten, sondern die aus x berechneten.
29	II	5 v. o.	Die erzielte Uebereinstimmung ist gering, da die fraglichen Temperaturen nur geschätzt worden waren.
30	I	17 v. u.	*setze* 200 *statt* 500.
31	II	15 v. u.	Das Umlegen der Stäbchen geschah stets so, dass die dem Mikroscop zugewandte Schmalseite ihm auch zu-
37	I	16 v. u.	gewandt blieb.
34	I	1 v. o.	*Setze in der Formel* B *statt* B *und* t_{2x+1} *statt* t^{2x+1}.
	II	14 v. o.	*schalte nach der Formel ein* etc.
35	I	9 v. o.	*lies* wären *statt* wäre.
		12 v. o.	*lies* n^{te} *statt* nta.
36	I	3 v. u.	*lies* B *statt* D.
37	II	25 v. o.	*lies* Fct von t *statt* Fct von $+$
39	I	16 v. o.	Dies ist nur soweit richtig, als die elastische Nachwirkung unmerklich ist.
	I	3 v. u.	*lies* $33^3/_4{}^0$ *statt* $^3/_4{}^0$.
	II	16 u. 17 v. o.	*setze* 2. *statt* 2
41	II	8 v. u.	*schalte nach* „Curven“ *ein*, wenn das System keine anderen enthält.
42	I	13 v. o.	*lies* zuerst *statt* früher.
		19 v. o.	*lies* würden . . . hineinfallen *statt* fallen . . . hinein.
43	I	19 v. o.	*setze* B *statt* R.
		29 v. o.	*lies* Constante *statt* Contante.
		1 v. u.	*füge an:* und ich φ mit $\cos\alpha$ verschwinden lasse.
	II	23 v. u.	*lies* erörterten *statt* erörterte.
		20 v. u.	*lies* für die die Rechnung ausgeführt ist *statt* für die Rechnung ausgeführt.
		17 v. u.	*lies* combinirt *statt* condinirt.
45	I	11 v. o.	*füge an:* für die Belastungsstelle.
46	I	21 v. u.	*Bemerkung:* Die folgende Betrachtung gilt nur soweit δ mit der Belastung proportional ist. Da dies nicht unbegrenzt stattfindet, so ist in ihr überall statt der elastischen Dilatation δ die Belastung p einzusetzen. Das ist erforderlich auf S. 46 I 19 u. 13 v. u., S. 46 II 3, 14 u. 24 v. o. S. 47 I 15 v. o. und in Fig. 21 bis 24.
47	I	21 v. o.	*setze* $= -1$ *statt* $= 1$.
		18 v. u.	*lies* Gerade parallel *statt* Gradparallele.
48	I	26 v. u.	*setze* x *statt* x.
		21 v. u.	*schalte nach* an *ein:* Denn die Gleichung giebt den Werth von δ so an, als wäre der Zustand eines freien ausgeschnittenen Parallelopipeds nach der Deformation der in § 9 erwähnte mittlere (siehe Fig. 19).
	II	15 v. u.	*schalte nach* die *ein:* dabei.
50	I	22 v. o.	*streiche* d. h.
51	I	20 v. o.	*füge an:* Der Winkel φ_1 hängt von ihnen ab durch die Gleichung $tg\,\varphi_1 = \frac{\overline{P}}{\overline{N}}$.
	II	13 v. o.	*lies* 54 *statt* 64.
52	I	13 v. o.	*setze* W. *statt* 0^0, 90^0, 90^0.
		15 v. o.	*setze* 660,0 *statt* 660,6.
	II	19 v. o.	*setze* 4152,5 *statt* 4150.
53	II	8 v. o.	*in den folgenden Formeln ist überall zu setzen* A *statt* λ.
		22 v. u.	*Statt des Absatzes:* Es ist . . . wirkt *setze:* Dasselbe hat für die höchste und tiefste Stellung der Säge entgegengesetzte Werthe. Ich nahm ihm den Einfluss soweit, dass keine merkliche Unregelmässigkeit übrig blieb, indem ich die Widerstände durch ein Verschieben des am Balancier befindlichen Gegengewichts Q (Fig. 26) eigenthümlich regulirte.
54	II	23 v. o.	*lies* Breit- *statt* Breite.

SEINEM HOCHVEREHRTEN LEHRER

HERRN GEHEIMRATH PROF. F. NEUMANN

IN DANKBARKEIT GEWIDMET

VOM VERFASSER.

VON FERNANDEZ

IN DANKBARKEIT GEWIDMET

HERRN GEHEIMRATH PROF. F. NEUMANN

SEINEM HOCHVEREHRTEN LEHRER

EINLEITUNG.

Unsere Kenntniss des innern Gefüges der Kristalle ist eine sehr geringe, und trotzdem das Bedürfniss ihrer Erweiterung lebhaft empfunden worden ist, sind doch verhältnissmässig wenig darauf hinzielende Arbeiten ausgeführt worden. Durch dieselben sind nun zwar eine Anzahl von Thatsachen entdeckt worden, die mit der Anordnung der Moleküle im Innern im engsten Causalnexus stehen, die sich auf das Verhalten der Kristalle gegen Licht, Schall, Wärme, Electricität und Druck beziehen, aber fast für alle fehlen exacte Beobachtungsmethoden und demgemäss zuverlässige brauchbare Zahlenangaben. So lange diese aber fehlen, ist wohl ein wesentlicher Fortschritt unseres Wissens über diesen Gegenstand kaum zu erwarten. Zur Ergänzung dieses Mangels beabsichtigt die vorliegende Arbeit einen Theil beizutragen.

Gegenüber den ältesten Resultaten über die Symmetrie der Anordnung der Theile in Bezug auf gewisse Ebenen, die sich aus der unmittelbaren Anschauung ergaben, und über die Unterschiede der Cohäsion in verschiedenen Richtungen, wie sie aus der Beobachtung der Spaltungsflächen folgten, brachten zuerst die optischen Untersuchungen von Huggheus, Fresnel u. s. w. einen Fortschritt, indem sie Ebenen und Richtungen in Bezug auf die in ihnen stattfindende Elasticität vor Anderen auszeichneten, die zum Theil für die unmittelbare Anschauung sich von Anderen nicht unterscheiden. Numerische Data für die Elasticität in verschiedenen Richtungen konnten sie schon darum nicht geben, weil sie sich nicht mit den Vibrationen materieller Theilchen beschäftigen. Dieselben zu untersuchen unternahm zuerst Felix Savart, der die Klangfiguren auf Platten, die in verschiedenen Richtungen aus Bergkristall, Kalkspath und Gyps geschnitten waren, mit solchen auf Holzplatten verglich, deren Elasticität in verschiedene Richtungen ihm bekannt waren. Es wurden dadurch Maxima und Minima der Elasticität constatirt, Constantenbestimmungen aber nicht erlangt.

In allerneuster Zeit sind eine Reihe von andern Erscheinungen der Beobachtung unterzogen worden, die von der Anordnung der Moleküle in Kristallen abhängig sind: die thermische Ausdehnung und Leitungsfähigkeit (z. B. v. Lang, Pogg. Ann. 135 und Fizeau, Pogg. Ann. 128 und 135) und das Verwitterungsellipsoid (Pape, Pogg. Ann. 135). Auch hierbei war es zumeist nur auf die Constatirung von Thatsachen, nicht auf die Erlangung exacter Zahlenwerthe abgesehen.

Der Erste, der Behufs der Bestimmung von Constanten einen Kristall mechanischen Kräften aussetzte, war Herr Prof. Sohnke, der in Königsberg die Zugfestigkeit des Steinsalzes in verschiedenen Richtungen untersuchte. Freilich lieferte diese Arbeit nicht vollständig das gesuchte Resultat, indem die belasteten Säulchen meist durchaus nach Würfelflächen rissen und also die Beobachtungen nur die Cohäsion in dieser Spaltungsfläche, und hierdurch eine untere Grenze für die in allen Anderen ergaben, aber dennoch ist durch diese Arbeit der erste Schritt zu einer Behandlungsweise gethan, die meiner Ansicht nach die nächstliegende war, und von der nur die technischen Schwierigkeiten zurückgeschreckt haben können: nämlich, vor allen Dingen die Einwirkung mechanischer Kräfte auf verschiedene Richtungen des Kristalles zu studiren.

Veranlasst durch eine Vorlesung des Herrn Geheimrath Neumann über Elasticität, unternahm es nun mein Freund Dr. Baumgarten hier in Königsberg, die Elasticitätscoefficienten des Kalkspathes in verschiedenen Richtungen durch das Biegen von dünnen Stäbchen zu bestimmen. Die Arbeit wird in dieser Zeit der Oeffentlichkeit übergeben; sie zeigt eine Vertheilung der Elasticitätsverhältnisse im Kalkspath, die der Hermiedrie seiner Gestalt vollständig entspricht, und mit einer in neuester Zeit von Herrn Geheimrath Neumann entwickelten Theorie, die allein auf der Annahme fusst, dass den äusseren Symmetrieverhältnissen der Kristalle die gleichen im Innern entsprechen, völlig übereinstimmt.

Herr Dr. Baumgarten schlug mir, während er noch in der Arbeit begriffen war, die Kristalle des regulären Systemes zu einer ähnlichen Untersuchung vor und theilte mir freundschaftlich die hauptsächlichsten Errungenschaften unsäglich mühsamer Vorarbeiten mit:

die Dimensionen, die den Stäbchen zu geben wären, um mit dem, erst Dr. Baumgarten, dann mir von Herrn Geheimrath Neumann gütigst geliehenen Beobachtungsapparat vortheilhaft beobachten zu können, nämlich grösste Dicke von 1 M^{m} bei kleinster Länge von 45 M^{m}; er ermöglichte mir dadurch, fast ohne Zeitverlust an die eigentliche Arbeit zu gehen. Die obengenannte Theorie des Herrn Geheimrath Neumann ergiebt für das reguläre System in der Richtung der Hauptaxen ein Maximum oder Minimum des Elasticitätscoefficienten; es war zu vermuthen, dass die Entscheidung, welches von beiden in der Natur stattfände, im Habitus der betreffenden Kristalle ausgedrückt sein würde, und ich fasste deshalb zugleich die Untersuchung von Steinsalz, Alaun und Flussspath in's Auge. Die Resultate der Untersuchung des Steinsalzes erlaube ich mir zunächst hier darzulegen.

Das Material zu diesen Beobachtungen lieferte mir wiederholentlich mit nicht genug zu dankender Freundlichkeit die Königliche Direction des Stassfurther Salzwerkes. Die Stücke hatten zumeist die Form von dicken Platten (bis zu den Dimensionen von 8,8 und 4 Centimetern); Stücke, die sich mehr der Würfelform nähern, scheinen seltner zu sein; ich konnte nur ein einziges erlangen, das gestattete, die Stäbchen in der Richtung der Würfeldiagonale von der erforderlichen Länge zu schneiden. Wegen Fortwachsungserscheinungen im Innern waren fast gar keine Stücke von der Benutzung auszuschliessen.

Die ersten (unter gut 80% Verlusten durch Zerbrechen), mit der Hand angefertigten Stäbchen wurden zu einer vorläufigen Serie von Beobachtungen (die als die I. aufgeführt ist) verwandt. Sie zeigten durch höchst mangelhafte Uebereinstimmung zunächst, dass wegen der grossen Weichheit des Materials die Anfertigung mit der Hand den Stäbchen eine gar zu unregelmässige Form gäbe, und daher eine sicherere Methode anzuwenden nöthig wäre. Die kleinen Vorrichtungen, die ich zu diesem Zweck construirte, um das Sägen und Schleifen der Stäbchen vorzunehmen, habe ich in einem Anhang etwas ausführlicher erörtert, als für die Sache selbst nöthig wäre, weil sie ihren Zweck sehr vollständig erfüllen und darum vielleicht Anderen bei verwandten Versuchen von Nutzen sein können.

Ferner zeigte die I. Serie von Beobachtungen, dass es nöthig wäre, die zahlreichen Fehlerquellen zu berücksichtigen und ihren Einfluss zu untersuchen, eventuell zu eliminiren.

Diese sind:

A. Fehler, herrührend von der Gestalt des Stäbchens:
   1. Die Axe des Stäbchens fällt nicht genau in die verlangte und in Rechnung gezogene Richtung.
   2. Das Stäbchen ist nicht prismatisch, sondern seine Dicke und Breite wechselt nach der Längsrichtung hin.
   3. Der Querschnitt des Stäbchens ist kein Rechteck sondern ein Trapez.

B. Fehler in der Beobachtungsmethode:
   4. Die Mikrometerschraube, mit der die Biegung gemessen wurde, ist nicht genau richtig.
   5. Es ist nicht möglich, das Stäbchen auf der belasteten Linie an jeder Stelle mit derselben Kraft niederzudrücken.
   6. Der Elasticitätscoefficient ist nicht unabhängig von der Temperatur.
   7. Es ist denkbar, dass die elastische Nachwirkung und der Rückstand einen Einfluss auf die elastische Biegung haben.

Dies sind die Fehlerquellen, die eine eigene Betrachtung und bezügliche Messungen nöthig machten. Unwesentlichere, die nur gewisse Vorsichtsmassregeln nöthig machten, sind an der Stelle, wo sie sich bemerklich machten, im Zusammenhang erwähnt. Eine besondere Reihe von Versuchen machte die hygroscopische Beschaffenheit des Steinsalzes nöthig. Sie sind an ihrer Stelle erwähnt; es zeigte sich, dass ganz besondre Vorsichtsmassregeln nöthig waren, um sie unschädlich zu machen. Die II. Serie von Beobachtungen hat um ihretwillen unrichtige absolute Werthe gegeben, darum ist diese, wie die erste Serie Beobachtungen, nur in einem Auszug mitgetheilt, während von einer dritten, die zur Bestimmung der absoluten Werthe unter Verwerthung der Erfahrungen aller früheren angestellt wurde, jede Messung aufgeführt ist; denn es schien mir wichtig bei den Werthen, die ich für zuverlässig halte, den Einfluss jeder Correction, sowie die Uebereinstimmung wiederholter Messungen mitzutheilen.

Die Bestimmungen der Elasticitätscoefficienten des Steinsalzes unter Berücksichtigung möglichst aller Fehlerquellen bildet den Gegenstand der ersten Hälfte der vorliegenden Abhandlung. Diese sollte ursprünglich gefolgt werden von einer in gleicher Weise durchgeführten Bestimmung der Torsionscoefficienten, zu deren Anstellung die Vorarbeiten bereits getroffen waren, als mich ein anderer, mit dem behandelten wenigstens äusserlich näher zusammenhängender, Gegenstand so sehr anzog, dass ich ihm selbst mehr Zeit als dem ersten Theile dieser Arbeit widmete. Die oft beobachteten bedeutenden Rückstände der Biegungen und ihre, die Beobachtungen der elastischen Biegungen störende Veränderlichkeit mit der Zeit, stellten der Untersuchung eine Anzahl von höchst interessanten Fragen. Zudem wusste ich, dass ich ein Material zum Beobachten besass, wie nicht leicht ein anderes für diesen Zweck günstiger gefunden werden konnte. Denn erinnert man sich, wie bei allen Beobachtungen über Elasticität in Metallen

geklagt wird über den Mangel an Homogenität und den Einfluss, den die Operationen der Darstellung auf die auftretenden Erscheinungen haben, so wird man zugeben, dass die Salzstäbchen grosse Vortheile vor den Metalldrähten und Stäben bieten — ja auch selbst vor gläsernen, wenn diese etwa der bequemeren Darstellung wegen genannt werden sollten. Und dies nicht nur wegen der schönen und leicht zu controlirenden Homogenität dieses Materiales, sondern auch wegen der Entstehungsart. Denn eine Abkühlung aus heisserem Zustande bringt in der Substanz stets Spannungen hervor, um so mehr, je weniger alle Theile gleichmässig erkalten. Daher kann man mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen, dass die Moleküle des Steinsalzes, als sie aus der wässerigen Lösung zu einem Kristall zusammentraten, die gegenseitige Lage angenommen haben, die man in der Theorie der Elasticität ihren „natürlichen“ Zustand nennt, — nur bedingt durch die Einwirkung der benachbarten Theilchen, ohne Einwirkung äusserer Kräfte (— denn die Schwere ist nicht von Belang —).

Und in der That haben, Dank diesem günstigen Beobachtungsobject, die vorliegenden Resultate einen Theil der schon früher einzeln beobachteten Thatsachen unter einen einzigen Gesichtspunkt zusammenfassen gelehrt und andererseits bisher unerklärliche Störungen durch ein mit Nothwendigkeit sich aufdrängendes Gesetz begreiflich gemacht.

Ich lege der Uebersichtlichkeit halber die hauptsächlichen Resultate im Voraus dar:

1. Ein im natürlichen Zustande befindliches Stäbchen hat eine, wenn auch sehr kleine, Elasticitätsgrenze.

2. Unterscheide ich, je nach dem das Stäbchen bei unveränderter Lage nach oben oder unten gebogen wurde, Biegungen in „entgegengesetzten Richtungen“, so gilt, dass ein mehrfach belastetes Stäbchen eine Elasticitätsgrenze besitzt, die von den letzt vorher gegangenen Biegungen abhängt. Nach der Richtung hin, in welcher diese stattfanden, ist die Elasticitätsgrenze gleich der grössten unter den vorhergegangenen zurückgehenden, d. i. elastischen Biegungen. Hatte diese die ursprüngliche Elasticitätsgrenze überschritten, so ist nach der entgegengesetzten Richtung die Elasticitätsgrenze $= 0$.

3. Hieraus folgt, dass ein Stäbchen, das durch mehrfache Biegungen äusserlich in den natürlichen, geradlinigen Zustand zurückgebracht ist, nicht die Eigenschaften des ursprünglichen Zustandes wieder erlangt hat, sondern statt nach beiden Richtungen nur nach einer eine Elasticitätsgrenze besitzt. Es liegt eine gewisse Poesie darin, dass die Spur einer einmal in dem harmonischen Gefüge verursachten Unregelmässigkeit niemals wieder vernichtet werden kann. Präcis bezeichnet diese Verschiedenheit des ersten Zustandes von allen späteren, ihm äusserlich gleichen, der Name des „jungfräulichen“, den ihm auf Grund meiner Darlegung Herr Geheimrath Neumann gegeben hat.

4. Bei einem Stäbchen nimmt in der Richtung, in der es keine Elasticitätsgrenze besitzt, mit wachsender Belastung der Rückstand um so schneller zu, je stärker concav seine Gestalt nach dieser Richtung hin ist, d. h. je stärker negativ sein Anfangsrückstand ist.

5. Hiervon findet eine Ausnahme für den ursprünglichen Zustand des Stäbchens statt. Ist es noch gar nicht nach der einen Richtung gebogen, so ist für den Verlauf des Rückstandes gleichgültig, ob und wie sehr es zuvor nach der entgegengesetzten Richtung gebogen ist. Also ist durch eine Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze nach der einen Richtung hin die nach der andern Richtung hin nicht verändert worden.

6. Die Beobachtung des Wachsens des Rückstands mit der Belastung zeigte mit voller Sicherheit, dass im Moment des Brechens durch einen unendlich kleinen Zuwachs der Belastung der Rückstand um einen endlichen vergrössert wird.

7. Weiter ist für die Aenderung des Rückstandes mit der Zeit und der mit der Belastung eine empirische Formel aufgestellt, deren letztere insofern eigenthümlicher und wichtiger ist, als zu ihrer Bestimmung eine Gleichung für das Verhalten ihres Differentialquotienten zu benutzen war.

8. Endlich ist versucht, das zusammengesetzte Phänomen des Rückstandes beim Biegen von Stäben zu reduciren auf das einfachere entsprechende beim Dilatiren und Comprimiren von Elementarprismen, und sind 12 zum Theil complicirte Eigenschaften des erstern erklärt durch die Annahme von 6 einfacheren Eigenschaften für das zweite. Nebenbei hat sich die elastische Nachwirkung als nach den gewonnenen Vorstellungen über den Rückstand selbstverständlich ergeben.

Es konnte nicht meine Absicht sein, aus meinen Folgerungen Schlüsse für die Praxis zu ziehen, wie die, um derentwillen früher dergleichen Beobachtungen angestellt sind, um so weniger, als jene Beobachtungen für ihre Zwecke genügten. Von älteren Untersuchungen des Rückstandes sind mir nur 3 bekannt:

Die erste von Lagerhjelm*) bezieht sich, wie auch die andern, hauptsächlich auf Versuche mit Eisen, und den Werth seines Elasticitätscoefficienten; nebenbei wird die Existenz des Rückstandes constatirt, die Erweiterung der Elasticitätsgrenze bei der Zunahme der Belastung bemerkt und angewandt, um zu erklären, warum gezogene Drähte eine grössere Elasticitätsgrenze besitzen, als geschmiedete Stäbe. Das einzige einfache Gesetz, was zwischen Elasticitätsgrenze und Grenze der Dehnbarkeit bestehend aufgestellt wird, muss eben wegen

*) Pogg. Ann. B. 13.

dieser Unsicherheit der Grösse der Elasticitätsgrenze als bei den von ihm untersuchten Stäben als nur zufällig erfüllt angenommen werden.

Bedeutend weiter geht, so weit ich aus einem in Pogg. Ann. B. 26 gegebenen Auszug ersehen konnte, v. Gerstner in seinem „Handbuch der Mechanik".

Er stellt völlig klar die oben gemachte zweite Bemerkung über die Elasticitätsgrenze auf und verbindet die angestellten Messungen der vollständigen Dehnung durch eine empirische Formel (eine Parabel gebend) Er hat die eigenthümliche Eigenschaft des Rückstandes im Moment des Reissens nicht beobachtet, vermuthlich, weil die Drähte, mit denen er experimentirte, stets zu zeitig rissen, aber seine empirische Formel, die nur nach dem Verlauf der ersten vier Fünftel der Dehnung gebildet ist, hat, man kann wohl sagen, zufällig (denn es ist bei ihrer Aufstellung weder beabsichtigt, noch wird es nachher aus ihr gefolgert) die Eigenschaft, im Punkte, wo er das Brechen vermuthet, senkrecht zu stehen. (Beiläufig bemerke ich, dass ein Blick auf die von mir wirklich bis zum Punkt des Brechens beobachteten Curven zeigt, dass dieselben unmöglich Parabeln sein können, wenn sie gleich im Anfang ihres Verlaufes mit solchen grosse Aehnlichkeit haben.)

Die letzte Arbeit über den Rückstand rührt von Herrn Thalén her, bringt aber ausser einigen für die Praxis wichtigen Zahlwerthen nichts Neues von Belang bei; im Gegentheil scheint mir Herr v. Gerstner namentlich die auf die Elasticitätsgrenze bezüglichen Sätze schon klarer ausgesprochen zu haben. Es mag die Methode, die Eisenstangen mittelst einer hydraulischen Presse zu dilatiren mit ihren Erschütterungen, deren Herr Thalén selbst Erwähnung thut, die einfachen Resultate wesentlich gestört haben. Wenigstens ist sonst nicht begreiflich, wie ein Zuwachs des Rückstandes ohne Zuwachs der Belastung entstehen konnte (also ein Unendlichwerden des Differentialquotienten!), mitten im Verlauf der Dehnung, während schon die Interpretation dieser Erscheinung hätte zeigen müssen, dass sie ordnungsmässig den Moment des Zerreissens characterisiren müsste. Für den Punkt des Zerreissens ist diese Consequenz nicht gezogen.

Um von den Erschütterungen, deren Einfluss mehrmals Erwähnung gethan ist, möglichst frei zu sein, gestattete mir Herr Professor Luther gütigst, meine Beobachtungen in der Sternwarte anzustellen, und als die winterliche Temperatur ein Bleiben daselbst unmöglich machte, Herr Geheimrath Neumann — dessen freundlichen Rath und Hülfe ich auch weiter noch dankbar zu erwähnen haben werde — den Apparat in seinem Auditorium im Universitätsgebäude aufzustellen, wo ich wenigstens während der Collegstunden und Sonntags vollständig die gewünschte Ruhe hatte. Diesen Herren sage ich für die freundlich meinen Bestrebungen gewährte Unterstützung meinen ergebensten, herzlichsten Dank.

Dies in Betreff der Veranlassung, Zwecke und Erfolge des zweiten Theiles. Der Abhandlung ist anhangweis eine Zusammenstellung der in der Hauptsache mehr nebenbei gefundenen Zahlenwerthe für die Spannungen beigegeben, bei den die belasteten Stäbchen zerbrachen. Sie sind mit denen von Herrn Prof. Sohnke gefundenen dem Charakter nach übereinstimmend, und habe ich, dies als eine Bestätigung der Nichtübereinstimmung der Beobachtung mit seiner Theorie ansehend, auf Grund einer von ihm gegebenen Andeutung eine Vorstellung untersucht und dargelegt, denen die gefundenen Werthe wenigstens nicht widersprechen. —

Nach diesen Darlegungen wird die Anordnung des Stoffes, wie sie in dem folgenden Verzeichniss gegeben ist, verständlich sein.

INHALT.

I. Theil.

Die Bestimmung der Elasticitätscoefficienten für das Steinsalz.

I. Abschnitt. Die Ableitung der elastischen Biegung eines Steinsalzstäbchens.

Seite

§ 1. Definition der elastischen und der dauernden Dilatation, der Elasticitätsgrenze und des Elasticitätscoefficienten 1

§ 2. Ausdruck für den Elasticitätscoefficienten durch die Constanten eines an beiden Enden aufliegenden und in der Mitte belasteten Prisma's 1

§ 3. Ableitung der Correction, die bei den Beobachtungen wegen der nach der Länge veränderlichen Dicke und Breite anzubringen ist 2

§ 4. Correction wegen der Abweichung des Querschnitts vom Rechteck 3

§ 5. Einfluss der Abweichung der Axe des Stäbchens von der geforderten Richtung 4

II. Abschnitt. Ueber die Beobachtungsmethode.

§ 6. Der Messapparat 4

§ 7. Die Fehler beim Aufsetzen der Schneide 5

§ 8. Die Ablesungsfehler 6

§ 9. Die Wiederholung der Beobachtungen 7

III. Abschnitt. Die Resultate der Messungen der elastischen Biegungen.

§ 10. Die 1. Serie von Beobachtungen (Auszug) 7

§ 11. Die 2. Serie (Auszug) 10

§ 12. Die 3. Serie 13

IV. Abschnitt. Untersuchung, innerhalb welcher Grenzen die elastische Biegung proportional der Belastung ist.

§ 13. Die Beobachtungsmethode 25

§ 14. Ist die Proportionalität innerhalb der Elasticitätsgrenze eine vollständige? 25

§ 15. Hat eine Erweiterung der Elasticitätsgrenze eine Aenderung der einem bestimmten Gewicht entsprechenden Biegung zur Folge? 26

V. Abschnitt. Einfluss der Temperatur auf die Werthe der Elasticitätscoefficienten.

§ 16. Die Beobachtungsmethode 27

§ 17. Die Resultate 28

VI. Abschnitt. Ueber die elastische Nachwirkung.

§ 18. Die elastische Nachwirkung, während das Stäbchen völlig in Ruhe bleibt 29

§ 19. Der Einfluss von Erschütterungen auf die elastische Nachwirkung 30

II. Theil.

Die Untersuchung des Rückstandes oder der dauernden Biegung.

I. Abschnitt. Die Beobachtungsmethoden.

Seite

§ 1. Uebersicht der die Grösse des Rückstandes beeinflussenden Umstände 31
§ 2. Beschreibung der Hülfsapparate der Beobachtung und ihrer Verwendung 32
a) Der „Zuflussapparat“ 32
b) Der „Einsenkungsapparat“ 32
c) Die „Schraube“ 33

II. Abschnitt. Betrachtung des Rückstandes als Function der Dauer der Belastung.

§ 3. Mathematische Darstellung des Vorganges 33
§ 4. Behandlung der empirischen Formel zur Berechnung des Rückstandes, der einer unendlichen Belastungsdauer entspricht 34

III. Abschnitt. Erläuterung der graphischen Darstellung der Beobachtungen in den Curventafeln.

§ 5. Allgemeinstes 35
§ 6. Catalog der dargestellten Beobachtungsreihen 36

IV. Abschnitt. Der Rückstand als Function der elastischen Biegung.

§ 7. Ableitung characteristischer Eigenschaften des Rückstandes aus den Beobachtungen 38
1. allgemeinste 39
2. solche, die sich auf den Einfluss des Anfangszustandes beziehen 41
§ 8. Aufsuchung einer Function der elastischen Biegung, die die gefundenen characteristischen Eigenschaften besitzt . . . 42
Vergleichung der berechneten mit den beobachteten Curven 43
§ 9. Entwickelung einer Vorstellung vom Zustande der Stäbchen, während sie einen Rückstand zeigen, die die beobachteten Erscheinungen erklärt 44

Anhang I.

Zusammenstellung und Discussion der beiläufig gefundenen grössten Werthe der Spannung, welche die Stäbchen verschiedener Gattungen ertragen 48

Anhang II.

Ueber die Bestimmung der Dimensionen der untersuchten Stäbchen 51

Anhang III.

Ueber die Anfertigung der beobachteten Stäbchen 52
1. Das Sägen 52
2. Das Schleifen 53

I. THEIL.

Die Bestimmung der Elasticitätscoefficienten für das Steinsalz.

I. Abschnitt.

Die Ableitung der elastischen Biegung eines Steinsalzstäbchens.

§ 1.

Definition der elastischen und der dauernden Dilatation, der Elasticitätsgrenze und des Elasticitätscoefficienten.

Die Dilatation, die ein an einem Ende festgehaltener Stab, an dessen freiem Ende eine in der Richtung seiner Axe wirksame Kraft angebracht ist, erfährt, besteht, gleichviel ob sie positiv oder negativ ist, aus 2 Theilen; der eine verschwindet mit dem Verschwinden der Kraft, der andere bleibt bestehen. Den ersteren bezeichnet man als elastische, den letzteren als dauernde Dilatation. Die erstere ist der Gegenstand dieses Theiles der Untersuchung.

Es lässt sich durch eine Dilatation des Prismas eine Grenze schaffen, innerhalb deren alle Dilatationen in demselben Sinne keinen Rückstand zurücklassen, man nennt sie die Elasticitätsgrenze des Stabes in diesem Zustand.*) Innerhalb derselben hält man sich durch darauf zielende Beobachtungen für berechtigt, die Dilatationen mit der angewandten Kraft proportional zu setzen. Ist also $\frac{\delta l}{l}$ die Dilatation des Stabes von der Länge l, P die angebrachte, auf die Einheit des Querschnittes bezogene Belastung, so ist

$$\frac{P.l}{\delta l} = E$$

eine dem Medium des Stabes angehörige Constante, die man seinen Elasticitätscoefficienten nennt; sie bezeichnet, wie die meisten einem Medium individuellen mechanischen Constanten, ein Gewicht, und zwar, nach der Interpretation der obigen Formel durch Th. Young, dasjenige, welches, auf die Einheit des Querschnittes ausgeübt, ein Prisma auf die doppelte Länge auszudehnen vermag.

*) Man kann die Elasticitätsgrenze auch dadurch definiren, dass innerhalb derselben die Biegung proportional der Belastung ist. Eine von beiden Definitionen muss man consequent beibehalten, denn dass beide sich decken ist erst zu beweisen.

§ 2.

Ausdruck für den Elasticitätscoefficienten durch die Constanten eines an beiden Enden aufliegenden und in der Mitte belasteten vollkommenen Prismas.

Es ist meine Absicht, den Elasticitätscoefficienten durch die Messung der Biegungen von Stäben zu bestimmen.

Es sei ein rechtwinkeliges Prisma von der Länge l, Breite B, Dicke D an einem Ende in horizontaler Lage festgehalten, an dem anderen mit dem Gewicht P_1 belastet, so werden seine oberen Schichten ausgedehnt, die unteren zusammengedrückt, zwischen ihnen bleibt eine, die sogenannte neutrale Schicht, unverändert und erleidet nur eine Formveränderung. Sie habe in Bezug auf ein Coordinatensystem durch ihren festgehaltenen Punkt, dessen Abscissenaxe horizontal liegt, die Coordinaten ξ und η. (S. Fig. 1.) Zwei unendlich nahe Ebenen, normal zur neutralen Schicht, ad und bc schneiden so kurze Stücke aus den dilatirten Schichten heraus, dass wir in ihnen die elastischen Kräfte constant nehmen können. P_y sei die in einer Schicht $\overline{gh}$ im Abstand y von der neutralen erregte elastische Kraft, bezogen auf die Flächen-

einheit; dann ist nach der Figur und der Definition von E

$$\frac{P_y}{E} = \frac{\overline{lh}}{\overline{gl}} = \frac{y}{\varrho}$$

wenn ϱ den Krümmungsradius der neutralen Schicht an jener Stelle bezeichnet.

Von aussen wirkt auf das Prisma das angebrachte Gewicht P_1 und sein eigenes; ist ε das Gewicht seiner Masseneinheit, p das Perpendikel von dem Punkt e der neutralen Schicht auf die Richtung der Kraft, so ist die Bedingung des Gleichgewichtes zwischen den innern und äussern Kräften:

$$\int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} BP_y y dy = pP_1 + \frac{p^2}{2} DB\varepsilon.$$

Dabei ist $P_y = \frac{Ey}{\varrho}$, $p = l - \xi$, also ergiebt sich eine Gleichung für den Krümmungsradius der neutralen Schicht im Abstand ξ vom festen Endpunkt:

$$\frac{1}{\varrho} = 12 \frac{(l-\xi) P_1 + \frac{(l-\xi)^2}{2} DB\varepsilon}{ED^3B}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass der Quotient $\left(\frac{\eta}{l}\right)^2$ gegen 1 zu vernachlässigen ist.

In meiner Untersuchung, wo die directen Ablesungen keine grössere Genauigkeit als $\frac{1}{500}$ des ganzen Werthes zu erreichen vermochten, sind Fehler von $\frac{1}{1000}$ in der mathematischen Entwickelung stets vernachlässigt worden; $\left(\frac{\eta}{l}\right)^2$ überstieg aber nie $\frac{1}{3000}$. Ebenso ist $\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2$ gegen 1 zu vernachlässigen, denn es überstieg nie $\frac{1}{10000}$. Darum setze ich statt $\frac{1}{\varrho} \Big| \frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ und erhalte durch zweimalige Integration, da am festgehaltenen Ende $\eta = 0$ und $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$ ist

$$\eta = \frac{12}{ED^3B}\left[P_1\left(l\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{6}\right) + \frac{\varepsilon DB}{2}\left(\frac{l^2\xi^2}{2} - \frac{l\xi^3}{3} + \frac{\xi^4}{12}\right)\right]$$

und das giebt für das freie Ende, wo $\xi = l$ ist

$$\eta_1 = \frac{4\left(P_1 + \frac{3}{8}\varepsilon DBl\right) l^3}{ED^3B}.$$

Dies gilt also für das einerseits in horizontaler Lage festgehaltene Prisma. Die Biegung des beiderseitig aufliegenden in der Mitte mit $\Pi = 2P_1$ belasteten Prismas von der doppelten Länge $L = 2l$ erhält man, wenn man dasselbe in der Mitte festgehalten und an beiden Enden mit dem halben Gewicht belastet denkt. So ergiebt sich der Niveauunterschied des Mittelpunkts und der Enden:

$$\eta_1 = \frac{\left(\Pi + \frac{3}{8}\Gamma\right) L^3}{4D^3BE},$$

wo mit Γ das Gewicht des Prismas bezeichnet sei.

(Vergleicht man diese Senkung η_1 mit der Dilatation desselben, mit demselben Gewicht ausgedehnten Stabes, so sieht man, dass sich beide verhalten wie $\frac{1}{4}\left(\frac{L}{D}\right)^2$ zu 1. Da nun L immer viel grösser ist als D, so erkennt man den Vortheil dieser Beobachtungsmethode gegenüber der directen Messung der Ausdehnung.)

Bezeichne ich den Zuwachs der elastischen Biegung, der einen Zuwachs der Belastung um 1 Gramm entspricht mit $\varkappa$, auf welche Einheit ich alle meine Messungen reducirt habe, so giebt sich der Ausdruck für den Elasticitätscoefficienten:

$$E = \frac{L^3}{4\varkappa D^3 B}.$$

§ 3.

Ableitung der Correction, die bei den Beobachtungen wegen der, nach der Länge veränderlichen, Dicke und Breite anzubringen ist.

Die von mir beobachteten Stäbchen aus Steinsalz waren keine vollkommenen Prismen, sondern hatten fast durchweg den Character eines der in Fig. 2 gezeichneten Doppelkeile, darum lag es nahe, statt der wirklichen Gestalt, der Berechnung einen Doppelkeil zu Grunde zu legen, der mit jener möglichst genau übereinstimmte. Das Genauere darüber ist in dem Abschnitt über die Bestimmung der Dimensionen der Stäbchen gesagt, hier sei nur erwähnt, dass die beiden Flächen der Keile höchstens um 1′ gegeneinander geneigt waren, also in den lineären Functionen für die Dicke der einen Hälfte des Stäbchens

$$D = D_m + a\xi$$

a höchsten $\frac{1}{3000}$ war, also $a\frac{L}{2} = \frac{1}{50}$

Es liegt also das Quadrat davon jedenfalls ausserhalb des zu Berücksichtigenden.

Die Breite, die etwa das 8fache der Dicke beträgt, variirt ebenfalls; da sie aber in der Formel für E nur lineär vorkommt und die Coefficienten von ξ absolut keine grössern Werthe haben, als bei der Dicke, so genügte es, die Breite für die ganze Länge des Stäbchens nach demselben Gesetz variiren zu lassen, wodurch die Formeln wesentlich einfacher werden. Unterscheide ich die beiden Hälften des Stäbchens durch griechische und lateinische Bezeichnungen, so sind hiernach die Dicken resp.:

$$D = D_m + a\xi \quad \Delta = \Delta_m + \alpha\xi$$

die Breiten:

$$B = B_m + b\xi \quad \mathrm{B} = B_m - b\xi,$$

wenn ich nach beiden Seiten hin die ξ positiv rechne. Die Dicken im Mittelpunkt, wo beide Keile zusammenstossen, brauchen sich nicht ganz gleich zu ergeben, da die lineären Functionen für D u. Δ aus allen gemessenen Werthen in gleicher Weise bestimmt sind. (Von dieser Betrachtungsweise ausgehend, sind die Correctionen der Belastungspunkte bestimmt, unter deren Benutzung die Beobachtungen angestellt sind. Obwohl ich später die Reduction der Elasticitätscoefficienten unter der Annahme ausgeführt habe, dass $\Delta_m = D_m$ und $=$ der wirklich gemessenen Dicke im Mittelpunkt sei, und die lineären Functionen demgemäss noch einmal bestimmt sind, wie das seines Orts erörtert wird, so glaubte ich doch, diese ursprüngliche, dem grössten Theile der Messungen zu Grunde gelegte Berechnungsweise nicht unterdrücken zu dürfen. Das Weitere ist am Anfang von § 11 besprochen.)

Da das Glied, welches das Gewicht des Stäbchens enthält, sehr klein und der Einfluss der Aenderung von Dicke und Breite darauf sehr gering ist, und dasselbe endlich in der bei der Beobachtung in Betracht kommenden Formel für E gar nicht mehr enthalten ist, so will ich es auch schon in der für den Krümmungsradius der neutralen Schicht ignoriren, und unter Benutzung der obigen Werthe für D, Δ, B, B schreiben für die 2 Hälften des Stäbchens

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} = \frac{12\,(l-\xi)\,P_1}{E{D_m}^3 B_m}\left(1 - \frac{3a\xi}{D_m} - \frac{b\xi}{B_m}\right);$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{12\,(\lambda-\xi)\,\Pi_1}{E{\Delta_m}^3 B_m}\left(1 - \frac{3\alpha\xi}{\Delta_m} + \frac{b\xi}{B_m}\right)$$

und hieraus folgt durch zweifache Integration: für die freien Enden:

$$y_1 = \frac{4l^3 P_1}{E{D_m}^3 B_m}\left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{3al}{D_m} + \frac{bl}{B_m}\right)\right];$$

$$\eta_1 = \frac{4\lambda^3 \Pi_1}{E{\Delta_m}^3 B_m}\left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{3a\lambda}{\Delta_m} - \frac{bl}{B_m}\right)\right]$$

Es ist im Allgemeinen nun gar nicht erfüllt, dass bei gleicher Länge der beiden Hälften die Höhendifferenzen des festgehaltenen und des freien Endpunktes für beide gleich ist. Und doch ist das die Bedingung, unter welcher die Integrationsconstanten verschwinden, denn nur dann ist die Tangente in dem festgehaltenen mittleren Punkte horizontal. Ich musste also über die 2 Längen l und λ, deren Summe die gegebene gesammte Länge des Stäbchens war, so verfügen, dass $\eta_1 = y_1$, und daher die Tangente im Coordinatenanfang horizontal würde. D. h. also, ich musste nicht im Mittelpunkt, sondern ein Stück davon belasten. Zur Bestimmung desselben setze ich

$$l = \frac{L}{2}(1 - A)$$

$$\lambda = \frac{L}{2}(1 + A)$$

und demgemäss nach Fig. 3:

$$P_1 = \Pi\left(\frac{1+A}{2}\right)$$

$$\Pi_1 = \Pi\left(\frac{1-A}{2}\right)$$

(worin Π das wirklich angebrachte Gewicht bezeichnet), in die Ausdrücke für η_1 und y_1 und diese sich einander gleich. Da A nie $\frac{1}{40}$ übersteigt, so muss ich sein Quadrat vernachlässigen, und erhalte unter Vernachlässigung von $a^2\ \alpha^2\ b^2$

$$A = \frac{3(\Delta_m - D_m)}{4D} - \frac{L}{32}\left[3\frac{a-\alpha}{D_m} + \frac{2b}{B_m}\right].$$

Dabei ist im ersten Gliede eine sogleich zu definirende mittlere Dicke D eingeführt. Dies A ist das später in den Tafeln aufgeführte, das mit $\frac{L}{2}$ multiplicirt die Abweichung des Mittelpunktes vom Belastungspunkte angiebt. Durch das Einsetzen dieses Werthes in η_1 und y_1 müssen diese gleich werden. Da sie sich aber noch in D_m und Δ_m unterscheiden, führe ich, um eine symmetrische Form zu bekommen, als die in Rechnung gezogene mittlere Dicke ein:

$$D = \frac{1}{2}\left[\left(D_m + \frac{aL}{4}\right) + \left(\Delta_m + \frac{aL}{4}\right)\right].$$

So habe ich $B_m = B$ gesetzt:

$$y_1 = \frac{\Pi L^3}{4ED^3B}\left[1 + 2A + \frac{3D - D_m}{D} - \frac{1}{4}\left(\frac{3aL}{2D} + \frac{bL}{2B}\right)\right]$$

$$\eta_1 = \frac{\Pi L^3}{4ED^3B}\left[1 - 2A + \frac{3D - \Delta_m}{D} - \frac{1}{4}\left(\frac{3\alpha L}{2D} - \frac{bL}{2B}\right)\right].$$

Und hieraus ist das Mittel die wirklich beobachtete Biegung

$$\eta_b = \frac{\Pi L^3}{4ED^3B}\left(1 + \frac{3}{8}(a+\alpha)\frac{L}{D}\right),$$

was ich bezeichne, (um die Correction wegen der Gestalt anzudeuten)

$$\eta_b = \frac{\Pi L^3}{4ED^3B}(1+\gamma)$$

wo

$$\gamma = +\frac{3}{8}(a+\alpha)\frac{L}{D}.$$

§ 4.

Correction wegen der Abweichung des Querschnittes vom Rechteck.

Weder die Seitenflächen, noch die oben und unten sind bei meinen Stäbchen untereinander völlig parallel.

Der erstere Fehler hat nur den Einfluss, dass in § 2 in dem Integral

$$+\frac{D}{2}$$
$$\int y^2 B dy$$
$$-\frac{D}{2}$$

für B zu setzen ist $B_\mu + ytg\beta$, dadurch wird dasselbe

$$= \frac{B_\mu D^3}{12}\left(1 + \frac{3}{8}\frac{D}{B} tg\beta\right).$$

Das 2. Glied übersteigt aber nie $\frac{1}{1000}$ und ist darum zu vernachlässigen, d. h. an die Stelle des trapezförmigen Querschnittes ein Paralleltrapez zu setzen, das, wie Fig. 4 zeigt, von ihm abweicht.

Der 2. Fehler verursacht hingegen, dass man an die Stelle von $D | D_\mu + ztg\alpha$ zu setzen, und demgemäss die ausgeübte Kraft in zwei Componenten zu zerlegen hat: $\Pi cos\alpha = \pi$, $\Pi sin\alpha = \vartheta$. (Vergl. Fig. 5.)

Die letztere wirkt um die Mittellängslinie des Stäbchens drehend, da die Kraft nicht unmittelbar auf die Oberfläche desselben ausgeübt werden kann, sondern an einem, im nächsten Abschnitt zu beschreibenden, kleinen auf der Oberfläche ruhenden Apparat in der Entfernung L von derselben angebracht werden muss, die erstere hingegen gleichmässig auf der ganzen belasteten Linie. Es muss daher die Biegung diesseits und jenseits des Stäbchens, an einem Hebelarm H resp. H_1 gemessen, die Form haben

$$N\pi + L\vartheta . H . M$$
resp.
$$N\pi - L\vartheta . H_1 . M$$

$N\pi$ ist für den Fall $\alpha = 0$ ist die Biegung des Stäbchens, und muss daher im Nenner D^3 enthalten, welches jetzt von α abhängig ist. Dabei mir α stets äusserst klein war, ist sein etwaiger Einfluss auf M zu vernachlässigen und $\pi = \Pi$ zu setzen und man erhält die beiden Biegungen

$$N\Pi\left(1 - \frac{3Htg\alpha}{D}\right) + L\vartheta HM$$
$$N\Pi\left(1 + \frac{3H_1 tg\alpha}{D}\right) - L\vartheta H_1 M.$$

Es ist nun möglich, wie im nächsten Abschnitt erörtert werden wird, diese 2 Biegungen zugleich zu messen und H nahe $= H_1$ zu machen. Daher ist das Mittel aus den 2 Messungen frei von Fehlergliedern erster Ordnung und von denen 2. ist nur das in L multiplicirte von Belang, wenn nicht L klein ist. Durch die sogleich zu erwähnende Anordnung sind die Glieder 2. Ordnung gegen 1 kleiner als $\frac{1}{1500}$ geworden und darum ohne Einfluss.

§ 5.

Einfluss der Abweichung der Axe des Stäbchens von der geforderten Richtung.

Da die Elasticitätscoefficienten mit der Richtung im Steinsalz stark variiren, und diese Abhängigkeit nachzuweisen, das erste Ziel meiner Arbeit war, so musste nach der Anfertigung durch Messung mit einem Reflexionsgoniometer untersucht werden, in wie weit die Axen der Stäbchen die geforderte Richtung hatten. Bei der zweiten Serie ist von jeder Gattung ein Stäbchen untersucht worden, weil die Vorrichtung beim Sägen so getroffen war, dass alle aus einem Stück geschnittenen Prismen fast absolut dieselbe Richtung der Axe erhielten. Die Fehler blieben immer unter $\frac{1}{2}^0$, ja meist unter $\frac{1}{4}^0$ und waren deshalb gegenüber der sonstigen Unsicherheit des Endresultates, das ihre Berücksichtigung höchstens um $\frac{1}{300}$ des Werthes modificirt hätte, gänzlich ohne Belang.

Bei dem Stäbchen der 3. Serie waren die Abweichungen von derselben Ordnung, sind aber bei der Berechnung der Beobachtungen berücksichtigt worden.

II. Abschnitt.

Ueber die Beobachtungsmethode.

§ 6.

Der Messapparat.

Der Apparat, mittelst dessen ich die Steinsalzstäbchen belastete und ihre Biegungen mass, war derselbe den schon Herr Dr. Baumgarten zu seiner Arbeit benutzt hatte und den mir nach ihm Herr Geheimrath Neumann zu leihen die Güte hatte. Die längere Beschäftigung mit ihm machte eine Reihe von Abänderungen und Zuthaten nothwendig, die durch die sogleich zu besprechenden Fehlerquellen bei seiner Handhabung motivirt werden. Der mir überkommene Theil seiner Einrichtung ist folgender:

Zwei messingene Schneiden sind bestimmt die Enden des Stäbchens zu unterstützen; sie sind auf einer starken Schiene einander parallel zu verschieben, um Stäbchen von verschiedenen Längen zu tragen. Eine in einen Bügel gefasste Schneide, an der eine Waagschaale zum Aufnehmen der Gewichte hängt, wird auf die Mitte des Stäbchens gelegt. Eine einfache Vorrichtung gestattet, die Waagschaale an ihrem Bügel zu unterstützen und so die Belastung, bis auf die Schneide, die

während der ganzen Versuchsreihe unverändert liegen bleibt, zu arretiren. An der Schneide befindet sich eine Marke, deren Stellung mit einem normal zur Axe des Stäbchens gerichteten Mikroscop mit Mikrometerschraube abgelesen wird.

Da ich wegen der Abweichung des Belastungspunktes vom Mittelpunkt der beiden Schneiden dieselben öfter verschieben musste, um eine andere Stelle des Stäbchens in die Axe des Mikroscopes zu bringen, legte ich, um dabei ihren Abstand unverändert gleich der in Rechnung gezogenen Länge des Stäbchens zu erhalten, zwischen sie ein genau diese Länge darstellendes Messingblech von der in Fig. 6 angegebenen Form. Der Bügel, in den die Schneide gefasst war, und ein angeschraubter Drath bildeten zusammen den festen Ansatz, der in § 4 erwähnt ist und eine Länge L von 120 mm hatte; eine so bedeutende Länge machte die Fehlerglieder 2. Ordnung, von denen dort gesprochen ist, durchaus nicht unbedeutend; ich wandte darum bei der 2. und 3. Serie eine Schneide an, für die L nur = 10 mm war und die nebenbei statt 8 Gramm nur 1,22 wog, was erlaubte, ein bedeutend grösseres Intervall der elastischen Biegung zu messen als früher; — denn die Schneide bleibt ja immer auf dem Stäbchen liegen. Statt an einer Kette, bei der nie bestimmt war, wie viel Glieder nach der Arretur der Waagschaale noch am Stäbchen zogen, hing ich dieselbe an einem Seidenfaden auf, der steif genug war, sich bei der Arretur der Waagschaale aus dem Haken an der Schneide heraus zu heben und wegen seiner Dehnbarkeit gestattete, fast ohne Erschütterung zu belasten. Die weiteren Einrichtungen zu motiviren, muss ich erst einige Fehlerquellen erörtern.

§ 7.

Die Fehler beim Auflegen der Schneide.

Es ist der theoretischen Erörterung zu Grunde gelegt, dass das Stäbchen in einer bestimmten Linie normal zur Längsrichtung des Stäbchens und in derselben überall gleichmässig belastet sei.

Durch die Verschiebung der beiden Lager ist diese Belastungslinie gerade in die Axe des Mikroscopes gebracht, man hat also eine Controle, ob die Forderung erfüllt ist, dass die Schneide in die Axe fällt. Da die Hand zu unsicher ist, die wünschenswerthe Genauigkeit zu erlangen, bin ich ihr durch die kleine in Fig. 7 gezeichnete Vorrichtung zu Hülfe gekommen, in der S das Schneidegestell bezeichnet. Sie wird über die, die beiden Lager tragende Schiene des Apparates geklemmt und durch hin- und herschieben so gerichtet, dass das in seiner Hülse vor und zurück gezogene Mikroscop das Bild der Schneide stets unter dem Fadenkreuz zeigt. So ist die Abweichung von der geforderten Belastungslinie sehr klein zu machen möglich und wird dadurch, dass das Aufsetzen und Abnehmen der Schneide nur mittelst der Schraube dieser kleinen Vorrichtung geschieht, auch so erhalten.

Damit diese Linie überall gleich stark belastet werde, ist nöthig, dass der Mittelpunkt der ausgeübten Kraft senkrecht unter der Längsmittellinie des Stäbchens liegt; das ist aber auch mit der obigen Vorrichtung nicht zu erreichen, weil diese Richtung keine äusserlich bestimmt markirte ist. Der darum unvermeidliche Fehler ist aber von grossem Einfluss,*) ich habe darum eine Methode ersonnen, ihn durch vier Beobachtungen gänzlich zu eliminiren. Dazu ist hier nur nöthig die Form zu bestimmen in der er auftritt. Ist $p_o + p_1 z$ (die z von der Mittellinie des Stäbchens gerechnet) der auf die Flächeneinheit im Abstand $+z$ ausgeübte Druck, so gilt zu seiner Bestimmung

$$\Pi = \int_{-\frac{B}{2}}^{+\frac{B}{2}} (p_0 + p_1 z)\, dz = p_0 B$$

und ausserdem, falls die Verticale durch den Schwerpunkt der angebrachten Last um $\frac{\delta}{2}$ von der Längsmittellinie des Stäbchens entfernt ist (siehe Fig. 8):

$$\Pi \frac{\delta}{2} = \int_{-\frac{B}{2}}^{+\frac{B}{2}} (p_0 + p_1 z)\, z\, dz = \frac{p_1 B^3}{12}.$$

p_0 ist also der in derselben Weise gleichmässig vertheilte Druck, als wenn der Fehler im Aufsetzen der Schneide $\delta = 0$ wäre, p_1 hingegen verursacht eine Drehung, die die Senkung auf der einen Seite vergrössert, auf der andern verkleinert, und mit $\delta\Pi$ proportional ist. Wird also die Senkung auf beiden Seiten an dem Hebelarm H resp. H_1 beobachtet, so giebt dies die beiden Werthe.

$$\eta_o = \Pi N + \delta \Pi H M$$
$$\eta_h = \Pi N - \delta \Pi H_1 M$$

Der nächstliegende Gedanke nun, die Senkung der Mittellinie selbst zu messen, wo H und $H_1 = 0$ sind und man also direct die der Belastung Π entsprechende Biegung abliest, ist aus verschiedenen practischen Bedenken zu verwerfen, von denen das wichtigste ist, dass keine Controle möglich ist, ob man auch wirklich die vom Mikroscop beobachtete Marke in der Längsmittellinie angebracht hat, welches auch ohne die Andern genügt den Vorschlag zu verwerfen.

---

*) Trotz aller Vorsicht habe ich Fälle beobachtet, wo ohne Anwendung der folgenden Methode Fehler von $\frac{1}{40}$ des gesammten Werthes gemacht worden wären. Siehe z. B. Serie 3: W. XI und XIII. Gr. XI.

Zur vollständigen Elimination des bestimmten Fehlers gelangte ich durch die folgende in Fig. 9 verdeutlichte Einrichtung der Schneide, deren Länge mit B bezeichnet sein mag. In dem Bügel waren hart unter der eigentlichen Schneide an beiden Seiten runde Oeffnungen angebracht und über diese Spinnenfäden gespannt, und zwar in solchem Abstand von der Schneide, dass man von der einen Seite unter dem Stäbchen hinweg das Mikroscop deutlich auf das an der andern Seite befindliche System einstellen konnte. Die Entfernungen dieser Fäden von der Vertikalen durch den Schwerpunkt der Schneide mit daran hängender Waagschaale konnten natürlich nicht vollständig gleich gemacht werden, sondern waren resp. $\frac{B+\Delta}{2}$ und $\frac{B+\Delta}{2}$ wo Δ den Fehler bezeichnet. Hiernach sind die Hebelarme H und H_1, an denen die Drehungen abgelesen wurden,

gemäss der Fig. 8 resp. $= \frac{B+\Delta-\delta}{2}$ und $\frac{B-\Delta+\delta}{2}$

also die Senkungen zu beiden Seiten abgelesen:

$$\eta_v^o = \Pi N + \delta\Pi \frac{(B+\Delta-\delta)}{2} M$$

$$\eta_h^o = \Pi N - \delta\Pi \frac{(B-\Delta+\delta)}{2} M.$$

Diese beiden Messungen sind bei ganz unveränderten Umständen gemacht; aus ihrem Mittel gehen schon die Glieder erster Ordnung heraus, nicht aber die zweiter, die zuweilen noch von Belang waren, zumal wenn Δ und δ entgegen gesetztes Vorzeichen hatten. Zu dem Zwecke, sie zu eliminiren, musste eine 2. Beobachtungsreihe bei einer andern Lage der Schneide angestellt werden. Um zugleich die übrigen Umstände möglichst zu ändern, die zufällig störend wirken konnten, legte ich das Stäbchen um, d. h. die eine Seite, die eine gewisse Marke trug und zuvor (wie der obere Index *o* sagen sollte) oben gelegen hatte, nach unten. Da ergab sich beim Aufsetzen ein anderer Fehler δ_1, während die Ungenauigkeit der Schneide selbst $= \Delta$ blieb. So sind diese 2 Beobachtungen:

$$\eta_v^u = \Pi N + \delta_1\Pi \frac{(B+\Delta-\delta_1)}{2} M$$

$$\eta_h^u = \Pi N - \delta_1\Pi \frac{(B-\Delta+\delta_1)}{2} M.$$

Aus diesen 4 Gleichungen ist die wahre Biegung ΠN zu bestimmen. Die einfache Rechnung ergiebt, wenn ich zur Abkürzung und zur Bequemlichkeit beim practischen Rechnen die Bezeichnung einführe:

$$\eta_v^u - \eta_h^u = d_u \qquad \eta_v^u - \eta_v^o = d_v$$
$$\eta_v^o - \eta_h^o = d_o \qquad \eta_h^u - \eta_h^o = d_h$$

$$\Pi N = \frac{\overset{4}{\Sigma}\eta}{4} - \frac{(d_u+d_o)(d_v+d_h)}{4(d_u-d_o)} + \frac{B^2}{B^2}\frac{d_u d_o}{3\Sigma\eta}$$

wo das erste Glied das Mittel aus allen 4 Messungen bezeichnet, das letzte aber fast stets zu vernachlässigen ist. Ich bezeichne das Correctionsglied wegen des Aufsetzens der Schneide mit $\frac{\alpha}{4}$, so kommt das gesuchte Resultat

$$\Pi N = \frac{\overset{4}{\Sigma}\eta - \alpha}{4}$$

Die Schneide hat während der Belastung stets eine etwas andere Lage, als während der Arretur der Waagschaale, weil ihr eigner Schwerpunkt nicht senkrecht über dem der angehängten Waagschaale liegt. Der Einfluss dieses Fehlers wurde einmal dadurch verkleinert, dass die Spinnenfäden möglichst dicht unter der Schneide aufgespannt waren (in der Entfernung von kaum $\frac{1}{2}$ Linie) und ausserdem das Schneidegestell, zuvor so justirt war, dass sich beim Entlasten kein Kippen mehr zeigte. Um das genau zu erkennen, waren die als Marke an der Schneide angebrachten horizontalen Fäden von einem verticalen durchkreuzt, dessen Heraustreten aus dem Fadenkreuze bei der Belastung sehr scharf zu erkennen war. So liess sich die seitliche Schwankung der Schneide sehr verkleinern. Dasselbe that ich auch mit der weniger einflussreichen vor- und rückwärts (das dem Mikroscop zunächst liegende Fadenkreuz als das vordere gedacht), die entsteht, wenn der Schwerpunkt des Schneidegestelles vor oder hinter dem der angehängten Last liegt. Dazu wurde diese Schneide quer auf eine andere gesetzt und so lange ihr Bügel gebogen, bis das Bild des horizontalen Faden im Mikroscop seine Stellung behielt, gleichviel ob die belastete Waagschaale arretirt war oder nicht.

§ 8.

Die Ablesungsfehler.

Um die Fehler beim Ablesen zu verringern, musste zunächst das Object, auf das das Fadenkreuz des Mikroscopes eingestellt wurde, ein möglichst günstiges sein. Daher spannte ich über die Oeffnungen der Schneide statt einfacher Spinnenfäden paralelle im Abstand von $\frac{1}{20}$ bis $\frac{1}{40}$ mm und erreichte dadurch eine Sicherheit in der Ablesung von mehr als $\frac{1}{2000}$ mm.

Ehe mir diese mühsame Arbeit recht gelingen wollte, wandte ich und fast mit demselben günstigen Erfolg, starke gezogene Schellackfäden einzeln an, die sich im durchgehenden Licht bei günstigen Umständen so scharf als Doppellinien markirten, dass einmal ein sehr erfahrner Beobachter einen solchen für 2 parallele Spinnen-

fäden hielt. Ich kann dies Verfahren sehr empfehlen; es ist nur bei wechselnder Beleuchtung, (also bei Tageslicht) gefährlich.

Die zur Messung der Biegungen angebrachte Mikrometerschraube war schon mehrmals benutzt und gut befunden, so dass ich, ohne sie zu prüfen, die erste Serie Beobachtungen mit ihr anstellte. Erst bei deren Berechnung bemerkte ich so bedeutende Abweichungen gleichseinsollender Werthe, dass ich mich zur Prüfung der Schraube entschloss. Ich mass dieselbe kleine Entfernung innerhalb 7 bis 8 Umläufen der Schraube sehr oft an verschiedenen Stellen, nahm an, dass das Mittel aus allen die wirkliche Länge sei, und suchte nun, welche Grösse zu jeder an der Trommel der Schraube abgelesenen Zahl zu addiren sei, um durch Anwendung dieser Correction alle Messungen übereinstimmend zu machen. Es gelang, alle auf dem fast ausschliesslich benutzten Intervall von 7—8 Umgängen angestellten Messungen bis auf 0,3 Trommeltheile (und so gross schätze ich den Fehler in der Ablesung) zur Uebereinstimmung zu bringen durch die in Fig. 10 dem Bild der Trommel beigefügten Correctionen. Darum hielt ich mich für berechtigt, diese Correctionszahlen als Mittelwerthe der in dem ganzen benutzten Intervall erforderlichen anzuwenden. — Die ganzen Schraubenumgänge zeigen keine Verschiedenheiten.

Wenn ich noch hinzufüge, dass die Vergleichung der Mikrometerschraube mit dem auf dem hiesigen Aichamte vorhandenen Normalmeter, soweit dessen dicke Theilstriche eine scharfe Messung gestatteten, (Unsicherheit von 5 Trommeltheilen!) genau 8 Umgänge oder 800 Trommeltheile $= 1^{mm}$ ergaben, so wird man nach dem Gesagten ein vollständig klares Bild der Zuverlässigkeit der Messungen und ihrer Reduction auf absolutes Maass haben.

§ 9.

Die Wiederholungen der Beobachtungen.

Behufs grösserer Sicherheit wurden die Messungen der elastischen Biegungen in folgender Weise wiederholt, wie es durch die vorausgeschickten Betrachtungen bereits motivirt ist.

Jede Einstellung des Fadenkreuzes wurde 3 Mal, jede Belastung 2 Mal bei sonst unveränderten Umständen wiederholt.

Bei einem jeden Stäbchen wurde mit 4 bis 6 verschiedenen Gewichten belastet. Diese ganze Beobachtungsreihe wurde erst mit dem vordern Faden der Schneide angestellt, dann mit dem hintern wiederholt, darnach das Stäbchen umgelegt und sämmtliche Beobachtungen für diese Lage vorgenommen. Von jeder Gattung wurde eine grössere Anzahl Stäbchen (2 bis 9) beobachtet. Durch letzteres wurden die Fehler bei der Bestimmung der Dimensionen und der Einfluss von Unregelmässigkeiten im Material nach Möglichkeit beseitigt.

Die vorstehenden zahlreichen Fehlererörterungen habe ich, trotz ihres abschreckenden Eindruckes, mitgetheilt, um zu zeigen, dass keine Vorsicht versäumt ist, das Endresultat von fremden Einflüssen zu befreien und zugleich zu beweisen, dass dieselben zum grössten Theil von Belang sind. Ich habe diese Discussionen der Angabe der Resultate vorangeschickt, weil sie die Einzelheiten der Beobachtungsmethode motivirten, werde aber an dieselben nun sogleich die Beobachtungstafeln anschliessen, um im Zusammenhang zu bleiben und erst nach diesen die, in der Einleitung schon angedeuteten, Fragen erörtern, die zwar zum Endresultat theilweise eine Correction fügten, aber die Beobachtungsmethode nicht modificirten: die Frage nach der Proportionalität der Biegungen mit dem Gewichte und dem Einfluss von Temperatur, elastischer Nachwirkung und Rückstand.

III. Abschnitt.

Die Resultate der Messungen der elastischen Biegungen.

§ 10.

Die I. Serie von Beobachtungen.

Es ist schon in der Einleitung erwähnt worden, dass die Untersuchung der ersten mit der Hand angefertigten Stäbchen erst die Veranlassung zur Bestimmung der verschiedenen Fehler waren. Es ist nur eine Correctur bei ihnen angebracht, die wegen der Gestalt, die nachträglich noch zu bestimmen möglich war, unter der Voraussetzung, dass die wirklich eintretende Biegung gleich dem Mittel aus den den beiden Hälften des Stäbchens für sich entsprechenden gesetzt werden könne. Dann hat γ (trotzdem hier $A = 0$ gesetzt werden muss) denselben Werth wie oben gegeben $\gamma = +\frac{3}{8}\frac{(a+\alpha)\,L}{D}$

Die untersuchten Gattungen von Stäbchen sind charakterisirt durch die Richtung ihrer Axe, je nachdem dieselbe lag in der

Normale einer Würfel-, Granatoëder-, Octaëderfläche sind dieselben

bezeichnet mit	W.	Gr.	O.

Bei den Normalen zu Pyramidenwürfelflächen ist zu dem Zeichen Pw. noch der Winkel gefügt, den dieselbe mit der Würfelnormale macht, also resp. Pw. $11^1/_4{}^0$, Pw. $22^1/_2{}^0$, Pw. $33^3/_4{}^0$.

Die verschiedenen Stäbchen derselben Gattung sind durch Nummern unterschieden, die als die mehrfach erwähnte Marke an einem Ende eingeritzt war.

Ich wiederhole die Bedeutung der angewandten Bezeichnungen: Es war

D = Dicke. B = Breite. L = Länge.

γ die Correction wegen der Gestalt.

$\varkappa$ die der Belastung mit 1 Gr. entsprechende Biegung.

$\varkappa$ ist aus den beobachteten Biegungen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet; die daraus bestimmten, den verschiedenen Belastungen entsprechenden Biegungen sind im Folgenden mit den beobachteten verglichen, um ein Urtheil über die Uebereinstimmung zu gewähren. Es ist ferner

Sa das Gewicht der Waagschaale = 6,66 Gramm.

E der Elasticitätscoefficient.

Da die Messungen vor der Prüfung der Schraube gemacht sind, welche die ganzen Schraubenumgänge als völlig gleich ergeben hat, so enthalten zwar alle Messungen ihre Fehler unreducirt, dieselben sind aber bei Biegungen von sehr nahe 100 Trommeltheilen verschwindend, und diese Werthe sind demnach zuverlässiger, als die andern Ablesungen. Ich habe aus ihnen noch einmal für sich bei den betreffenden Stäbchen $\varkappa$ und E bestimmt und diese Werthe als $\varkappa_1$ und E_1 beigegeben: Noch erinnere ich, dass 800 Trommeltheile = 1 Millimeter sind.

W. Stäbchen normal zur Würfelfläche.

No. II. $D = 819{,}5$ $B = 2471$ $L = 45$ mm
$= 1{,}024$ mm $= 3{,}09$ mm $\gamma = -0{,}04$

Belastung:	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40	Sa + 50
Biegung: ber.	22,5	36,0	49,5	63,0	76,5
beo.	21,2	35,7	49,8	62,8	77,3
Fehler	+ 1,3	+ 0,3	− 0,3	+ 0,2	− 1,8

$\varkappa = 1{,}35$ **E = 3900000 Gr.**

No. III. D = 916 $B = 2552$ $L = 45$ mm
$= 1{,}145$ mm $= 3{,}19$ mm $\gamma = -0{,}06$

	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40	Sa + 50
ber.	16,8	25,3	34,8	42,3	53,8
beo.	16,7	26,1	35,1	44,5	52,7
	+ 0,1	− 0,8	− 0,3	− 2,2	+ 1,1

$\varkappa = 0{,}948$ **E = 3790000 Gr.**

No. IV. $D = 704$ $B = 2102$ $L = 60{,}75$ mm
$= 0{,}88$ mm $= 2{,}63$ mm $\gamma = -0{,}08$

	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 25
ber.	114,6	143,9	173,2	202,4
beo.	113,3	143,3	173,6	203,5
	+ 1,3	+ 0,8	− 0,4	− 1,1

$\varkappa = 5{,}846$ **E = 3830000 Gr.**
$\varkappa_1 = 5{,}92$ **E = 3780000 „**

Pw. 22½°. Stäbchen normal zum Pyramidenwürfel von 22½° St.

No. I. $D = 755$ $B = 2144$ $L = 45$ mm
$= 0{,}94$ mm $= 2{,}68$ mm $\gamma = -0{,}012$

	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40
ber.	37,0	57,6	79,2	100,8
beo.	34,6	56,5	79,4	101,4
	− 2,4	− 1,1	+ 0,2	+ 0,6

$\varkappa = 2{,}215$ **E = 3610000 Gr.**
$\varkappa_1 = 2{,}228$ **E = 3590000 „**

No. III. $D = 986$ $B = 2122$ $L = 60{,}75$ mm
$= 1{,}23$ mm $= 2{,}65$ mm $\gamma = -0{,}10$

	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	Sa + 25	Sa + 30
ber.	44,7	56,1	67,5	78,9	90,3	101,7
beo.	44,6	56,7	67,8	78,5	89,7	101,8
	+ 0,1	− 0,6	− 0,3	+ 0,4	+ 0,6	− 0,1

$\varkappa = 2{,}28$ **E = 3560000 Gr.**

No. III. (2. Beobachtung.)

	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	Sa + 25	Sa + 30
ber.	46,0	57,7	69,4	81,1	92,8	104,6
beo.	46,5	58,3	69,5	81,0	93,0	104,1
	− 0,5	− 0,6	− 0,1	+ 0,1	− 0,2	+ 0,5

$\varkappa = 2{,}345$ **E = 3700000 Gr.**

No. III. (3. Beobachtung.)
$D = 1000$ $B = 2122$ $L = 45$ mm
$= 1{,}25$ mm $= 2{,}65$ mm $\gamma = -0{,}046.$

	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40	Sa + 50
ber.	15,2	24,3	33,4	42,5	51,6
beo.	14,6	23,6	33,4	42,7	51,4
	+ 0,6	+ 0,7	0	− 0,2	+ 0,2

$\varkappa = 0{,}910$ **E = 3730000 Gr.**

No. IV. $D = 1003$ $B = 1799$ $L = 45$ mm
$= 1{,}25$ mm $= 2{,}25$ mm $\gamma = -0{,}007$

	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40	Sa + 50
ber.	18,3	29,3	40,3	51,3	62,5
beo.	18,6	30,0	41,0	50,9	61,9
	+ 0,3	+ 0,7	+ 0,7	− 0,4	− 0,4

$\varkappa = 1{,}10$ **E = 3670000 Gr.**

Gr. Stäbchen normal zur Granatoëderfläche.

No. I. $D = 894$ $B = 1616$ $L = 60{,}75$ mm
$= 1{,}12$ mm $= 2{,}02$ mm $\gamma = -0{,}047$

	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	Sa + 25	Sa + 30
ber.	90,6	113,6	136,7	159,8	182,9	206,0
beo.	90,5	114,4	137,3	158,2	182,0	208,4
	+ 0,1	− 0,8	− 0,6	+ 1,6	+ 0,9	− 2,4

$\varkappa = 4{,}62$ **E = 3280000 Gr.**
$\varkappa_1 = 4{,}65$ **E = 3250000 „**

Gr. No. I. (2. Messung.)

$D = 896$ $B = 1616$ $L = 45$ mm
$= 1{,}145$ mm $= 2{,}02$ mm $\gamma = -0{,}007$.

Belastung:	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40
Biegung: ber.	31,3	50,1	68,9	87,7
beo.	31,5	51,4	69,1	87,1
Fehler:	−0,2	−1,3	−0,2	+0,6

$\varkappa = 1{,}883$ **E = 3390000 Gr.**

No. II. $D = 806$ $B = 1665$ $L = 45$ mm
$= 1{,}01$ mm $= 2{,}81$ mm $\gamma = -0{,}055$

	6a + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40
ber.	40,6	65,2	89,6	114,2
beo.	40,9	62,9	89,6	115,3
	−0,3	+2,3	0	−1,1

$\varkappa = 2{,}45$ **E = 3300000 Gr.**
$\varkappa_1 = 2{,}41$ **E_1 = 3370000 „**

O. Stäbchen normal zu einer Octaederfläche.

No. I. $D = 803{,}5$ $B = 2394$ $L = 45$ mm
$= 1{,}004$ mm $= 2{,}99$ mm $\gamma = -0{,}016$

	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40
ber.	31,7	50,8	69,9	89,0
beo.	31,5	49,0	69,6	91,0
	+0,2	+1,8	+0,3	−1,0

$\varkappa = 1{,}914$ **E = 3150000 Gr.**

O. No. II. $D = 782$ $B = 2560$ $L = 45$ mm
$= 0{,}98$ mm $= 3{,}20$ mm $\gamma = -0{,}023$

	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40
ber.	31,8	51,1	70,3	89,5
beo.	30,3	51,0	71,1	89,9
	+1,5	+0,1	−0,8	−0,4

$\varkappa = 1{,}89$ **E = 3150000 Gr.**

No. II. (2. Messung.)

$D = 778$ $B = 2560$ $L = 60{,}75$ mm
$= 0{,}972$ $= 3{,}20$ mm $\gamma = -0{,}055$

	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	Sa + 25	Sa + 30
ber.	56,9	79,8	103,9	126,9	152,0	176,1
beo.	56,6	80,0	102,6	127,3	152,4	175,7
	+0,3	−0,2	+1,3	−0,4	−0,4	+0,4

$\varkappa = 4{,}81$ **E = 3010000 Gr.**
$\varkappa_1 = 4{,}78$ **E_1 = 3020000 „**

Ich stelle die Werthe für die 4 untersuchten Gattungen hier noch einmal zusammen, um den Ueberblick zu erleichtern, und nehme das Mittel daraus:

W. II. 3900000
III. 379
IV. 383, 378
W. 3820000 Gr.

Pw. $22\frac{1}{2}^0$ I. 3610000, 3590000
III. 3700000, 356
III. 367
IV. 373
Pw. $22\frac{1}{2}^0$ 3670000 Gr.

Gr. I. 3390000
II. 328, 325
II. 330, 337
Gr. 3320000 Gr.

O. II. 3150000
I. 399
II. 301, 302
O. 3070000 Gr.

Herr Geheimrath Neumann hat in seinen Vorträgen über Elasticität im Wintersemester 1873—74 nachgewiesen, dass alle Erscheinungen der Elasticität im Steinsalz höchstens von drei Constanten abhängen können. Dieses Resultat ergab sich unter der einzigen Voraussetzung, dass die Druckcomponenten der elastischen Kräfte proportional mit den vorgenommenen Verrückungen sein sollten, allein aus der Betrachtung der Symmetrieverhältnisse im regulären System. Die Compression Δl eines in irgend einer Richtung aus dem Kristall geschnittenen Prismas in seiner Längsaxe, deren Richtung durch a bezeichnet sein möge, bei einem Druck auf die Einheit der Fläche $= \Pi$, fand sich abhängig allein von 2 Aggregaten dieser 3 Constanten, die ich mit M und N bezeichnen will, durch die Formel

$$\frac{\Delta l}{\Pi l} = M + N[\cos^4(ax) + \cos^4(ay) + \cos^4(az)]$$

wobei das Coordinatensystem mit den Kristallaxen zusammenfallend gedacht ist. Es ist aber $\frac{\Delta l}{\Pi l}$ der reciproke Elasticitätscoefficient für die Richtung der Axe a und also

$$\frac{1}{E_a} = M + N[\cos^4(ax) + \cos^4(ay) + \cos^4(az)].$$

die Gleichung, welche durch die beobachteten Werthe des Elasticitätscoefficienten in den verschiedenen Richtungen die Constanten M und N geben muss. Dass das Zusammenbestehen der Gleichung mit den beobachteten Werthen von E_a nothwendig ist, folgt aus der absoluten Sicherheit der Grundlage für die Ableitung: der Symmetrieverhältnisse im regulären System.

Es ist mehrfach hervorgehoben worden, dass die Beobachtungen der ersten Serie den Character vorläufiger Versuche haben; darum wird man auf die geringe Uebereinstimmung geringes Gewicht legen; dennoch

wird die Verbindung ihres Resultates mit denen der 2. und 3. Serie von Wichtigkeit werden.

Es fand sich (E noch wie bisher in Grammen ausgedrückt)

$$M = \frac{0{,}354}{1000000} \quad N = \frac{-0{,}100}{1000000}$$

und daraus rückwärts berechnet die Werthe der Elasticitätscoefficienten, die mit den characterisirenden Buchstaben der Gattungen von Stäbchen bezeichnet werden mögen

W. = 3,94 Pw. $22^1/_2{}^0$ = 3,59 Gr. = 3,29 O. = 3,11

Millionen Gramm. Damit die beobachteten verglichen:

= 3,82 = 3,64 = 3,32 = 3,06

zeigt allerdings, dass die Beobachtungen der ersten Serie kaum mehr angeben, als die allgemeinste Form der Oberfläche, die man durch Auftragen der, gleichen Belastungen entsprechenden, Dilatationen auf ihren Richtungen erhält.

Ich wiederhole die Ursachen, die den Beobachtungen der ersten Serie so geringe Uebereinstimmung gegeben haben:

Die Unregelmässigkeiten in der Gestalt, die durch die Art der Anfertigung vergrössert und in der Rechnung nur wenig berücksichtigt waren,

der nicht berücksichtigte Fehler der Mikrometerschraube,

der durch die Beobachtungsmethode nicht eliminirte Fehler beim Aufsetzen der Schneide, dem ich den grössten Einfluss von allen zuschreiben möchte.

Diese sind sämmtlich vermieden bei den Beobachtungen der 2. Serie.

§ 11.

Auszug aus der II. Serie von Beobachtungen.

Die 2. Serie unterscheidet sich von der ersten durch die Anwendung aller in den vorausgeschickten Betrachtungen erörterten Vorsichtsmassregeln und Fehlercorrectionen, zu deren Aufsuchung ich eben durch die schlechte Uebereinstimmung der durch die erste Serie von Beobachtungen gefundenen Resultate veranlasst war.

Diese Correctionen werden in der folgenden Zusammenstellung bei jedem Stäbchen und zwar unter folgenden Buchstaben angeführt werden:

Die Correction wegen der Gestalt des Stäbchens $= \gamma$

„ „ wegen des Fehlers beim Aufsetzen der Schneide $= \frac{\alpha}{4}$

„ „ wegen der Abweichung der Temperatur, bei der die Messungen vorgenommen sind, von 15° R. $= \vartheta$

Dies eingesetzt wird der gesuchte Elasticitätscoefficient

$$E = \frac{L^3}{4\varkappa D^3 B}\left(1 + \gamma + \frac{d}{4\varkappa} + \vartheta\right)$$

L, D, B und $\varkappa$ haben dieselbe Bedeutung wie in der ersten Serie, ich wiederhole nur, dass $\varkappa$ die elastische Biegung für die Belastung von 1 Gramm ist.

Die Ableitung der Correction ϑ wird erst in einem folgenden Abschnitt auf Grund einiger darauf bezüglicher Beobachtungen abgeleitet werden. Der Werth von $\frac{\alpha}{4}$ ist in § 7 angegeben. Dagegen ist über γ hier ein Wort zu sagen nöthig.

Es war statt der in Wahrheit ziemlich unregelmässigen Form der Stäbchen, die zweier in der Belastungsstelle zusammenstossenden Keile, substituirt und, wie in dem Capitel über die Dimensionenbestimmung gezeigt wird, so bestimmt worden, dass die Abweichung von der wirklichen Form ein Minimum wurde. Dabei ereignete es sich, dass die Dicke an der Belastungsstelle von der beobachteten abwich und sich auch für beide Keile ein klein wenig verschieden fand. Das letztere hat kein Bedenken, denn die beiden Hälften sind in dieser ganzen Betrachtung völlig selbstständig behandelt worden, — wohl aber das erstere. Denn ein Blick auf die Formel für den Krümmungsradius der neutralen Schicht zeigt, dass die Krümmung im Belastungspunkte am grössten ist, und also die Dicke des Stäbchens an jener Stelle auf die Biegung am meisten influirt. Diese Betrachtung hat mich veranlasst, die vorher nach den auf die genannte Weise bestimmten Keilen ausgeführte Berechnung von

$$\gamma = 3\,\frac{D - \frac{D_m + \Delta_m}{2}}{D}$$

durch eine andere zu ersetzen, wo bei der Bestimmung der 2 Keile $D_m = \Delta_m$ und gleich der beobachteten Dicke genommen wurde. Dadurch ändert sich D gar nicht, aber für γ ist zu setzen

$$\gamma = 3\,\frac{D - D_m}{D}.$$

Der durch diese Aenderung erreichte Gewinn an Uebereinstimmung der Resultate (den ich bei der 3. Serie belegen werde) beweist die obige Betrachtung.

Ich stelle im Folgenden die aus dem Mittel der vier Beobachtungen η^o_v η^o_h $\eta_v{}^u$ $\eta_h{}^u$ gefundenen Biegungen (s. § 7), mit denen aus $\varkappa$ rückwärts berechneten zusammen; dazu ihre Abweichungen, um ein Urtheil über die Zuverlässigkeit der Messungen zu gewähren. Die Einheiten der Längen sind Trommeltheile der Schraube $= \frac{1}{800}$ mm., wo nichts anderes angeführt ist. $\frac{aL}{2}$ resp. $\frac{\alpha L}{2}$ giebt die Differenz der Dicke in der Mitte und an den Enden des Stäbchens, $\frac{AL}{2}$ den Abstand des Belastungspunktes vom Mittelpunkte (s. § 3).

Sa, das Gewicht der Waagschaale, ist für diese Serie = 6,704 Gramm.

W. Stäbchen in der Würfelnormale.

W. No. II.

$D = 498{,}4$ $B = 4160$ $L = 63$ mm $\frac{aL}{2} = -11{,}25$

$= 0{,}623$ mm $= 5{,}21$ mm $\frac{AL}{2} = +0{,}12$ mm $\frac{aL}{2} = -4{,}2$

Belastung:	Sa	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	
berechnet:	64,9	113,3	161,7	210,1	
beobachtet:	63,8	112,5	161,4	210,9	$\varkappa = 9{,}68$
Fehler	+1,1	+0,8	+0,3	−0,8	

$\gamma = -0{,}03$ $\frac{\alpha}{4} = -0{,}013$ $\vartheta = 0$

E = 3970000 Gr.

W. No. III, V sind wegen einer nachträglich bemerkten Veränderung des Objectivs am Mikroscop von der Berechnung ausgeschlossen. Sie ergaben resp. $E = 3670000$ und 3500000; das Verhältniss der Abweichung zu dem Mittel aus den übrigen ist dasselbe wie bei Gr II., und liegt darin die Berechtigung ihrer Ausschliessung.

W. No. VII.

$D = 604{,}7$ $B = 4173$ $L = 63$ mm $\frac{aL}{2} = -17{,}7$

$= 0{,}756$ mm $= 5{,}22$ mm $\frac{LA}{2} = 0{,}54$ mm $\frac{aL}{2} = +28{,}5$

Sa	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	Sa + 25	
37,5	65,4	93,4	121,3	149,3	177,2	
36,5	64,8	93,1	120,9	149,8	177,6	$\varkappa = 5{,}59$
+1,0	+0,6	+0,3	+0,4	−0,5	−0,4	

$\gamma = +0{,}095$ $\frac{\alpha}{4} = 0$ $\vartheta = 0$

E = 3940000 Gr.

W. No. VIII.

$D = 454{,}4$ $B = 3855$ $L = 63$ mm $\frac{aL}{2} = +16{,}8$

$= 0{,}568$ mm $= 4{,}82$ mm $\frac{LA}{2} = -0{,}31$ mm $\frac{aL}{2} = +39{,}0$

Sa	Sa + 2	Sa + 4	Sa + 6	
105,3	136,7	168,1	199,5	
104,9	136,1	168,4	199,9	$\varkappa = 15{,}71$
+0,4	+0,6	−0,3	−0,4	

$\gamma = +0{,}012$ $\frac{\alpha}{4} = 0$ $\vartheta = 0$

E = 4020000 Gr.

W. No. IX.

$D = 540$ $B = 4102$ $L = 63$ mm $\frac{aL}{2} = +36{,}0$

$= 0{,}675$ mm $= 5{,}15$ mm $\frac{LA}{2} = 0{,}38$ mm $\frac{aL}{2} = +13{,}2$

Sa	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	
54,1	94,4	134,8	175,1	215,5	
53,5	93,8	134,2	175,1	215,9	$\varkappa = 8{,}07$
+0,6	+0,6	+0,6	0	−0,4	

$\gamma = +0{,}067$ $\frac{\alpha}{4} = 0{,}004$ $\vartheta = 0$

E = 4180000 Gr.

Pw. 11¼°. Stäbchen normal zum Pyramidenwürfel von 11¼°.

No. I.

$D = 584{,}1$ $B = 3770$ $L = 63$ mm $\frac{aL}{2} = +14{,}1$

$= 0{,}730$ mm $= 4{,}71$ mm $\frac{LA}{2} = 0{,}14$ mm $\frac{aL}{2} = +22{,}8$

Sa	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	
51,1	89,2	127,3	165,4	
51,0	89,0	126,8	165,4	$\varkappa = 7{,}62$
+0,1	+0,2	+0,5	0	

$\gamma = +0{,}040$ $\frac{\alpha}{4} = -0{,}05$ $\vartheta = 0$

E = 3740000 Gr.

Pw. 22½°. Stäbchen normal zum Pyramidenwürfel von 22½°.

Pw. 22½°. No. III.

$D = 489$ $B = 3738$ $L = 50$ mm $\frac{aL}{2} = -8{,}0$

$= 0{,}611$ mm $= 4{,}67$ mm $\frac{AL}{2} = 0{,}4$ mm $\frac{aL}{2} = -10{,}0$

Sa	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	
47,0	82,1	117,2	152,3	187,4	
46,0	82,0	116,5	151,8	188,3	$\varkappa = 7{,}02$
1,0	0,1	0,7	0,5	−0,9	

$\gamma = +0{,}012$ $\frac{\alpha}{4} = -0{,}10$ $\vartheta = 0$

E = 3430000 Gr.

Pw. 22½°. No. IV.

$D = 616{,}7$ $B = 4492$ $L = 63$ mm $\frac{aL}{2} = -1{,}8$

$= 0{,}771$ mm $= 5{,}61$ mm $\frac{AL}{2} = 0{,}5$ mm $\frac{aL}{2} = -13{,}8$

Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	Sa + 25	
66,8	95,4	123,9	158,2	181,0	
67,9	97,1	126,0	154,7	184,3	$\varkappa = 5{,}71$
−1,1	−1,7	−2,1	+3,5	−3,5	

$\gamma = -0{,}009$ $\frac{\alpha}{4} = 0{,}004$ $\vartheta = 0$

E = 3380000 Gr.

Hierbei müssen irgendwelche störenden Einflüsse, z. B. ein Kippen der aufgesetzten Schneide, stattgefunden haben.

Pw. 33¾°. Stäbchen normal zum Pyramidenwürfel von 33¼°.

No. I.

$D = 437{,}1$ $B = 3760$ $L = 50$ mm $\frac{aL}{2} = -26{,}8$

$= 0{,}586$ mm $= 4{,}70$ mm $\frac{LA}{2} = 0{,}42$ mm $\frac{aL}{2} = +36.$

Belastung:	Sa	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	
Bieg.: ber.	75,1	131,2	187,2	243,3	
beo.	74,8	130,8	187,2	243,5	$\varkappa = 11{,}21$
Fehler:	+ 0,3	+ 0,4	0	− 0,2	

$\gamma = +0{,}022$ $\frac{\alpha}{4} = +0{,}02$ $\vartheta = 0$

E = 3000000 Gr.

Pw. 33¾°. No. II.

$D = 403{,}2$ $B = 3748$ $L = 63$ mm $\frac{La}{2} = -2{,}7$

$= 0{,}504$ mm $= 4{,}68$ mm $\frac{LA}{2} = 0$ $\frac{La}{2} = +0{,}9$

Sa	Sa + 1	Sa + 2	Sa + 3	
173,6	199,5	225,4	251,3	
173,3	199,4	225,9	251,1	$\varkappa = 25{,}91$
+ 0,3	+ 0,1	− 0,5	+ 0,2	

$\gamma = +0{,}034$ $\frac{\alpha}{4} = 0$ $\vartheta = 0$

E = 3210000 Gr.

Pw. 33¾°. No. III.

$D = 545{,}5$ $B = 4545$ $L = 63$ mm $\frac{aL}{2} = +12{,}0$

$= 0{,}682$ mm $= 5{,}68$ mm $\frac{AL}{2} = 0{,}47$ mm $\frac{aL}{2} = +7{,}2$

Sa	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	
62,0	108,2	154,5	200,7	
62,2	108,1	154,6	200,7	$\varkappa = 9{,}25$
− 0,2	+ 0,1	− 0,1	0	

$\gamma = +0{,}034$ $\frac{\alpha}{4} = +0{,}08$ $\vartheta = 0$

E = 3130000 Gr.

Pw. 33¾°. No. IV.

$D = 591{,}5$ $B = 4572$ $L = 50$ mm $\frac{aL}{2} = +24{,}3$

$= 0{,}780$ mm $= 5{,}72$ mm $\frac{LA}{2} = 0{,}25$ mm $\frac{aL}{2} = +2{,}1$

Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	Sa + 25	
41,5	59,3	77,0	94,8	112,5	
41,4	59,2	77,2	94,6	112,4	$\varkappa = 3{,}55$
+ 0,1	+ 0,1	− 0,2	+ 0,2	+ 0,1	

$\gamma = +0{,}02$ $\frac{\alpha}{4} = -0{,}025$ $\vartheta = 0$

E = 3080000 Gr.

Gr. Stäbchen normal zur Granatoederfläche.

Gr. No. I.

$D = 713$ $B = 4139$ $L = 50$ mm $\frac{aL}{2} = +40$

$= 0{,}891$ mm $= 5{,}17$ mm $\frac{AL}{2} = -1{,}17$ mm $\frac{aL}{2} = -42{,}8$

Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40	Sa + 50	Sa + 60	
38,7	61,9	85,1	108,3	131,5	154,7	
38,7	61,9	85,1	108.2	132,0	155,2	$\varkappa = 2{,}32$
0	0	0	+ 0,1	− 0,5	− 0,5	

$\gamma = +0{,}003$ $\frac{\alpha}{4} = ?$ $\vartheta = -0{,}005$

E = 2950000 Gr.

Gr. No. II. Ist wegen des bei W. III erwähnten Fehlers ausgeschlossen.

Gr. No. III.

$D = 388{,}4$ $B = 3732$ $L = 63$ mm $\frac{aL}{2} = -66{,}6$

$= 0{,}485$ mm $= 4{,}66$ mm $\frac{AL}{2} = +1{,}6$ mm $\frac{aL}{2} = +39{,}9$

Sa	Sa + 2	Sa + 3	Sa + 4	Sa + 5	Sa + 6	
201,9	262,2	292,4	322,5	352,6	382,8	
201,3	262,2	292,6	322,9	352,6	382,7	$\varkappa = 30{,}14$
+ 0,6	0	− 0,2	− 0,4	0	+ 0,1	

$\gamma = +0{,}045$ $\frac{\alpha}{4} = ?$ $\vartheta = -0{,}005$

E = 2960000 Gr.

Gr. No. IV.

$D = 522{,}6$ $B = 3936$ $L = 50$ mm $\frac{aL}{2} = 3{,}0$

$= 0{,}656$ mm $= 4{,}92$ mm $\frac{LA}{2} = 0$ $\frac{aL}{2} = -2{,}0$

Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	Sa + 25	Sa + 30	
72,1	102,9	133,7	164,5	195,3	226,1	
72,1	102,6	133,6	164,5	195,4	226,3	
0	+ 0,3	+ 0,1	0	− 0,1	− 0,2	

$\gamma = -0{,}002$ $\frac{\alpha}{4} = ?$ $\vartheta = -0{,}005$

E = 2950000 Gr.

Bei diesen Beobachtungen und ausserdem bei O. No. II. war die Einrichtung zur Elimination des Fehlers beim Aufsetzen der Schneide noch nicht getroffen, darum ist $\frac{\alpha}{4}$ nicht bestimmbar gewesen.

O. Stäbchen in der Normale zu einer Octaederfläche.

O. No. I.

$D = 504$ $B = 2375$ $L = 63$ mm $\frac{aL}{2} = 9{,}3$

$= 0{,}630$ mm $= 2{,}84$ mm $\frac{AL}{2} = -0{,}4$ mm $\frac{aL}{2} = -34{,}5$

Sa	Sa + 2	Sa + 4	Sa + 6	Sa + 8.	
158,4	205,7	253,0	300,2	347,5	
158,8	205,2	252,8	300,5	347,7	$\varkappa = 23{,}64$
− 0,4	+ 0,5	+ 0,2	− 0,3	− 0,2	

$\gamma = -0{,}054$ $\frac{\alpha}{4} = 0{,}006$ $\vartheta = 0$

E = 2710000 Gr.

O. No. II.

$D = 691{,}8$ $B = 2575$ $L = 63$ mm $\frac{aL}{2} = 0{,}12$

$= 0{,}865$ mm $= 3{,}22$ mm $\frac{AL}{2} = -0{,}17$ mm $\frac{aL}{2} = -25{,}5$

Bel.:	Sa	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	
ber.	55,8	97,5	139,3	181,0	222,8	
beo.	55,0	97,2	139,3	180,8	223,5	$x = 8.35$
Fehl.:	+ 0,8	+ 0,3	0	+ 0,2	− 0,7	

$\gamma = -0{,}031$ $\frac{a}{4} = ?$ $\vartheta = -0{,}004$

E = 2770000 Gr.

Diese Zahlenwerthe geben zusammengestellt folgende Mittel:

W.	II.	397	**Pw.**	11¼°	I. 3740000 Gr.
	VII.	402			
	VIII.	394	**Pw.**	22½°	III. 343
	IX.	418			IV. 338
W.		4028000 Gr.	**Pw.**	22½°	3405000 Gr.
Pw.	33¾°	I. 300	**Gr.**	I. 295	**O.** I: 271
		II. 321		III. 296	II. 277
		III. 313		IV. 295	**O.** 2740000 Gr.
		IV. 308	**Gr.**	2953000 Gr.	
Pw.	33¾°	3105000 Gr.			

Dieses Resultat in die oben erwähnte von Herrn Geheimrath Neumann angegebene Formel für die reciproken Elasticitätscoefficienten in regulären Kristallen:

$\frac{1}{E_a} = M + N\,[cos^4)ax) + cos^4(ay) + cos^4(az)]$ eingesetzt, ergiebt die Werthe:

$$M = \frac{0{,}422}{1000000} \qquad N = \frac{-\,0{,}172}{1000000}.$$

Berechnet man hieraus rückwärts die Elasticitätscoefficienten für die verschiedenen Richtungen im Steinsalzkristalle, so erhält man die folgende Zusammenstellung mit den beobachteten Werthen:

	W.	**Pw.** 11¼°	22½°	33¾°	**Gr.**	**O.**	
berechnet	3,995	3,802	3,411	3,090	2,975	2,742	Millionen Gramm.
beobachtet	4,028	3,740	3,405	3,105	2,950	2,740	
Fehler	− 33	+ 62	+ 6	− 15	+ 25	+ 2	

Bei der Berechnung von M und N aus den beobachteten Zahlen ist jeder von diesen ein Gewicht beigelegt, gleich der Anzahl der Stäbchen, die zu ihrer Bestimmung verwandt worden sind. Es darf also der auffällig grosse Fehler bei **Pw.** 11¼° nicht Wunder nehmen.

Es erübrigt noch die Reduction der gefundenen definitiven Zahlenwerthe auf den Druck von einer Atmosphäre als Einheit. Diese giebt:

$$M = \frac{4{,}329}{1000000} \qquad N = \frac{-\,1{,}761}{1000000}.$$

Ferner sind die Elasticitätscoefficienten

W.	389400	Atm.	Pw.	11¼°	370600 Atm.
Gr.	290000	„		22½°	332400 „
O.	267200	„		33¾°	301200 „

Die durch gleiche Belastungen*) in verschiedenen Richtungen im Steinsalz hervorgebrachten Dilatationen, auf diesen Richtungen als Längen aufgetragen, geben durch ihre Enden eine Oberfläche, deren Gleichung ist

$$\varrho = \frac{4{,}329\,.\,\Pi}{1000000} - \frac{1{,}761\,.\,\Pi}{1000000}[cos^4(ax) + cos^4(ay) + cos^4(az)]$$

Figur 11 auf Tafel I stellt sie in perspectivischer Ansicht dar.

*) Die Belastungen sind durch Atmosphäre zu geben.

§ 12.

Die III. Serie der Beobachtungen der elastischen Biegung.

Es kann nicht geleugnet werden, dass trotz der guten Uebereinstimmung der gefundenen Elasticitätscoefficienten in den verschiedenen Richtungen mit dem für sie geltenden Gesetz, die Uebereinstimmung der bei verschiedenen Stäbchen derselben Gattung gefundenen Werthe untereinander, (an denen die Methode der kleinsten Quadrate nicht ihre, Fehler bedeckende Wirkung gezeigt hat) zu wünschen übrig lässt, und dass namentlich die Abweichung der absoluten Werthe der Constanten der 1. und 2. Serie von Beobachtungen Bedenken erregt. Der Umstand, dass die durch die 2. Serie gefundenen Elasticitätscoefficienten sämmtlich kleiner sind, als die aus der ersten, dass also die gemessenen Biegungen den Umständen nach grösser gewesen sind als jene, und endlich die Gewissheit, bei der Beobachtung der Biegungen jeden Fehler von Belang vermieden oder eliminirt zu haben, wiesen mich mit Sicherheit darauf, in der Bestimmung der Dimensionen Fehler begangen zu haben. Ein Fehler von $\frac{1}{100}$ der Dicke verursachte ja ausserdem einen von $\frac{1}{30}$ des Elasticitätscoefficienten.

In der That zeigten die, vielfach zu den im Folgenden besprochenen Untersuchungen verwandten, Stäbchen der 2. Serie eine merkliche Aenderung in der Politur der Oberfläche, und da die Stäbchen immer mit Petroleum (aus einer Flasche, die stets Stücken Steinsalzes enthielt) bestrichen der Luft ausgesetzt wurden, so konnte nur eine Veränderung des Petroleums an der Luft, eine Art Zersetzung, wie sie Herr Geheimrath Neumann beobachtet zu haben mir mittheilte, dasselbe in einen Zustand bringen, in dem es das Steinsalz angriff. Denn Stücken, die monatelang in einer Büchse in Petroleum aufbewahrt waren, zeigten nicht eine Spur einer ähnlichen Aenderung der Oberfläche. Die nur einmal beobachteten Stäbchen der ersten Serie zeigten eine weit bessere Politur, und war daher anzunehmen, dass die mit ihnen erhaltenen absoluten Zahlen den wirklichen näher kommen würden. Auch ist ihre Dicke im Durchschnitt die doppelte derer der II. Serie und also eine Aenderung nur vom halbem Einfluss.

Trotz der Erkenntniss von der Unzuverlässigkeit der absoluten Werthe glaubte ich die Resultate der I. und II. Serie nicht verschweigen zu dürfen, hauptsächlich um die Unsicherheit der scheinbar vortrefflich übereinstimmenden Werthe der folgenden Beobachtungen beurtheilen zu lassen, und nebenbei, um zu beweisen, dass der theo-

retischen Formel des Herrn Geheimrath Neumann in Wahrheit vollständig genügt wird. Denn es ist anzunehmen, dass die Aenderung der Dicke bei allen Stäbchen in nicht gar verschiedener Weise vor sich gegangen sein möchte, und der Character der Oberfläche, die ich vorhin erwähnte, derselbe geblieben sein möchte, wenngleich die absoluten Werthe ihrer Parameter weder gleich, noch proportional den wirklichen sind (denn auch letzteres kann man nicht erwarten).

Ich ging also mit aller Vorsicht, die mich die in ihren Resultaten nicht vollständig genügende Arbeit der I. und II. Serie gelehrt hatte, an die Herstellung einer neuen Serie von Stäbchen; die alten waren sämmtlich bis auf zwei den Beobachtungen der dauernden Biegung geopfert worden. Jede polirte Fläche wurde augenblicklich mit einer Schicht venetianischen Terpentins bedeckt und die fertigen Stäbchen in kleinen Röhrchen mit Terpentinöl aufbewahrt. Einige, die durch ein wenig Feuchtigkeit, die sie von der Wand der Röhrchen angenommen haben mochten, trübe Flecken erhalten hatten, wurden von Neuem polirt. Auch die Messungen von Dicke und Breite wurden nun in Terpentinöl vorgenommen, wie später noch mit ein paar Worten erörtert werden soll.

Einige vorläufige Versuche zeigten, dass die elastische Biegung sich nicht änderte, wenn man das Stäbchen mit einer Schicht Terpentin überzogen belastete, — wie ja zu erwarten stand, da sich Terpentin sehr lange flüssig erhält. Beim Umlegen des Stäbchens wurde der Terpentinüberzug erneuert, die Schneiden von dem etwa anhaftenden gereinigt.

Die an den 9 Stäbchen der III. Serie angestellten Messungen will ich vollständig hier darlegen, weil ich selbst Werth auf dieselben lege und der Leser nur durch klare Darlegung des Einflusses der Fehler ein Urtheil über die Zuverlässigkeit einer Constantenbestimmung erhält.

Die Stäbchen sind nur in drei verschiedenen Richtungen geschnitten: in der

Würfel-
Granatoeder-
Octaeder-

} Normale.

Die ersten beiden konnten aus demselben Kristall geschnitten werden; von den Stücken, die in der Octaedernormale die geforderten Dimensionen hatten, besass ich nur eines, und das gestattete, schon vielfach benutzt, keine Stäbchen anderer Gattungen darzustellen.

Im Folgenden sind nun auf diese 9 Stäbchen bezüglich zusammengestellt:

1. die 2 Reihen Dickemessungen, die 2 Reihen Breitemessungen,*) wie sie in dem darauf bezüglichen Capitel (Anhang II) erklärt sind.
2. die der Rechnung zu Grunde gelegte Dicke D und Breite B, sowohl in Trommeltheilen, als in Millimetern.
3. Die Entfernung der beiden Schneiden, auf denen das Stäbchen lag, d. i. seine in Rechnung gezogene Länge L.
4. Die Aenderung der Dicke vom Belastungspunkt des Stäbchens bis zu jedem Endpunkt, resp. $\frac{aL}{2}$ und $\frac{aL}{2}$ (siehe § 3).
5. Die Entfernung des Belastungspunkts vom Mittelpunkt des Stäbchens, aus dem vorigen berechnet $= \frac{AL}{2}$.
6. Hierauf folgt die Reihe der Beobachtungen für die zwei Lagen des Stäbchens, o und u, dadurch unterschieden, dass die Marke daran sich oben oder unten befand, an der hintern (h) und vordern (v) Seite der Schneide.

In den Belastungen ist das Gewicht der Waagschaale, die die Grammstücken aufnahm, Sa $= 6{,}704$ Gr. stehen gelassen, die hinzugefügte Zahl giebt die der aufgelegten Gr. an.

Die obersten zwei Paar Zahlen in jedem Felde sind die an der Trommel der Mikrometerschraube abgelesenen, eine jede durch 3 Einstellungen erhalten; darunter die Differenzen jedes Paares sind die direct beobachteten Biegungen. σ ist die Correctur wegen des Fehlers der Schraube, wie sie sich aus dem in Figur 10 dargestellten Schema ergiebt. Mit grossen Zahlen ist dann das reducirte Mittel aus den 2 Belastungen mit demselben Gewicht bezeichnet. Ferner ist die Differenz auf einander folgender beigeschrieben. — Zu unterst folgen die Mittel jeder Verticalreihe und deren Differenzen, ganz rechts die Mittel der Differenzen in jeder Horizontalreihe.

7. Aus diesen Beobachtungen ist die elastische Biegung für 1 Gramm Belastung $= \varkappa$ berechnet.
8. Die aus $\varkappa$ berechneten, den wirklich angewandten Belastungen entsprechenden Biegungen sind ebenso, wie in der I. und II. Serie, mit den beobachteten verglichen. Es folgt
9. Die aus den Mitteln der Differenzen in den Horizontalreihen berechnete Correction $\frac{\alpha}{4}$ wegen des Fehlers beim Aufsetzen der Schneide.
10. Die aus den Dimensionenbestimmungen berechnete Correction γ wegen der Gestalt der Stäbchens.

Durch ihre Hinzufügung zu dem aus LDB und $\varkappa$ berechneten Elasticitätscoefficienten erhält man den wirklichen, der mit E bezeichnet ist.

(Die Beobachtungen wurden in einem Raume angestellt, der sehr constant die Temperatur 15° R. besass, darum ist die Correctur wegen der Temperatur $\vartheta = 0$ bei allen Beobachtungen.)

*) Die Längen sind, wo nicht eine Benennung den Zahlen beigefügt ist, stets in Trommeltheilen der Mikrometerschraube $= \frac{1}{800}$ Millimeter angegeben.

W. No. XI.

Dimensionenbestimmungen.

$$D \left[\begin{array}{ccccccc} 451 & 426 & 411 & 406 & 415 & 433{,}5 & 460{,}5 \\ 462 & 444 & 424 & 416 & 415 & 432 & 468{,}5 \end{array} \right] \Delta \qquad B \left[\begin{array}{ccc} 3452 & 3402 & 3344 \\ 3448 & 3398 & 3341 \end{array} \right] \mathrm{B}$$

$$D = \mathbf{430{,}4} = \mathbf{0{,}538}\ ^{\mathrm{mm}}; \quad L = \mathbf{63}\ ^{\mathrm{mm}}; \quad B = \mathbf{3398} = \mathbf{4{,}25}\ ^{\mathrm{mm}}.$$

$$\frac{aL}{2} = 53{,}1 = 0{,}066\ ^{\mathrm{mm}} \qquad A = 0{,}001$$

$$\frac{aL}{2} = 46{,}2 = 0{,}051\ ^{\mathrm{mm}} \qquad \frac{LA}{2} = 0{,}03\ ^{\mathrm{mm}}.$$

Messung der Biegungen.

Belastung	Sa	Sa + 1	Sa + 2	Sa + 3	Mittlere Differenzen
o v	206,9 206,9 66,5 66,8 140,4 140,1 $\sigma = -1{,}5$ **138,8** 20,6	225,9 225,9 65,7 66,3 160,2 159,6 $\sigma = -0{,}5$ **159,4** 21,0	244,2 244,4 65,4 65,6 178,8 178,8 $\sigma = +1{,}6$ **180,4** 21,6	264,6 267,2 62,2 65,1 202,4 202,1 $\sigma = -0{,}2$ **202,0**	21,1
o h	206,2 206,1 66,4 66,6 139,8 139,5 $\sigma = -1{,}5$ **138,1** 20,5	225,4 225,5 66,3 66,3 159,1 159,2 $\sigma = -0{,}5$ **158,6** 21,0	244,2 244,4 66,6 66,3 177,6 178,1 $\sigma = +1{,}7$ **179,6** 21,2	266,5 267,0 65,5 66,3 201,0 200,7 $\sigma = 0$ **200,8**	20,9
u h	192,3 192,3 53,9 53,7 138,4 138,6 $\sigma = -3{,}1$ **135,4** 21,3	212,8 212,9 52,9 53,4 159,9 159,5 $\sigma = -3{,}0$ **156,7** 20,2	231,2 231,1 53,0 53,2 178,1 177,9 $\sigma = -1{,}1$ **176,9** 21,2	249,8 250,5 51,8 52,8 198,0 197,7 $\sigma = +0{,}2$ **198,1**	20,9
u v	209,8 209,5 64,0 64,0 145,8 145,5 $\sigma = -1{,}7$ **144,0** 19,7	228,0 228,0 64,0 64,0 164,0 164,0 $\sigma = -0{,}3$ **163,7** 20,8	247,0 247,3 63,7 63,8 183,3 183,5 $\sigma = +1{,}4$ **184,5** 21,0	269,4 270,1 63,2 63,7 206,2 206,4 $\sigma = -0{,}8$ **205,5**	20,5
Mittel	**139,1** 20,5	**159,6** 20,8	**180,4** 21,2	**201,6**	20,8
berechnet .	**139,0**	**159,8**	**180,5**	**201,3**	
	+ 0,1	− 0,2	− 0,1	+ 0,3	

$$\frac{\alpha}{4} = +0{,}05 \qquad \gamma = +0{,}14 \qquad \varkappa = 20{,}75$$

E = 4140000 Gr.

W. No. XII.

Dimensionenbestimmungen.

$$D \left[\begin{array}{ccccccc} 847 & 807 & 781{,}5 & 761 & 748{,}5 & 744{,}5 & 745 \\ 841 & 807 & 777 & 755 & 745 & 743 & 743 \end{array}\right] A \qquad B \left[\begin{array}{ccc} 2778 & 2812 & 2832 \\ 2778 & 2804 & 2826 \end{array}\right] \mathrm{B}$$

$$D = \mathbf{772{,}6} = \mathbf{0{,}966}\ ^{mm};\quad L = \mathbf{63}\ ^{mm};\quad B = \mathbf{2806} = \mathbf{3{,}51}\ ^{mm}.$$

$$\frac{aL}{2} = 85{,}8 = 0{,}107\ ^{mm} \qquad A = 0{,}022$$

$$\frac{aL}{2} = -\,7{,}3 = 0{,}009\ ^{mm} \qquad \frac{LA}{2} = 0{,}68\ ^{mm}.$$

Messung der Biegungen.

Belastung	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 25	Sa + 30	Mittlere Differenzen
v	103,6 103,7	139,6 139,6	160,6 160,8	181,1 182,6	
	33,7 33,8	33,5 33,7	33,0 33,5	31,1 32,7	
	69,9 69.9	106,1 105,9	127,6 127,3	150,0 149,9	
	$\sigma = -2{,}4$	$\sigma = +0{,}6$	$\sigma = -0{,}1$	$\sigma = -2{,}0$	
	67,5	**106,6**	**127,4**	**148,0**	
u	39,1	20,8	20,6		20,1
	85,6 85,5	124,9 124,8	142,8 142,6	163,8 164,9	
	19,7 19,8	19,7 19,8	19,7 19,5	19,0 19,8	
	65,9 65,7	105,2 105,0	123,1 123,1	144,8 144,1	
	$\sigma = -0{,}5$	$\sigma = +0{,}4$	$\sigma = +2{,}6$	$\sigma = +1{,}4$	
	65,3	**105,5**	**125,7**	**145,9**	
h	40,2	20,2	20,2		20,2
h	113,1 112,8	149,0 148,9	170,8 171,0	189,9 192,3	
	43,7 43,6	43,3 43,4	43,0 43,2	40,1 42,9	
	69,4 69,2	105,7 105,5	127,8 127,8	149,8 149,4	
	$\sigma = -3{,}0$	$\sigma = +0{,}3$	$\sigma = -2{,}1$	$\sigma = -3{,}1$	
	66,3	**105,9**	**125,7**	**146,5**	
o	39,6	20,2	20,8		20,2
	70,5 70,4	112,2 112,0	129,9 129,8	148,3 149,0	
	6,0 6,1	6,1 6,0	6,3 6,5	5,5 6,2	
	64,5 64,3	106,1 106,0	123,6 123,3	142,8 142,8	
	$\sigma = +1{,}1$	$\sigma = +0{,}1$	$\sigma = +1{,}9$	$\sigma = +3{,}4$	
	65,5	**106,1**	**125.4**	**146,2**	
v	40,6	19,3	20,8		20,3
Mittel	**66,15** 39,87	**106,02** 20,03	**126,05** 20,60	**146,65**	20,2
berechnet .	**66,1**	**105,9**	**126,2**	**146,1**	
	+ 0,1	+ 0,1	— 0,1	+ 0,6	

$$\frac{\alpha}{4} = 0 \qquad \gamma = +\,0{,}056 \qquad \varkappa = 3{,}986$$

$$\mathbf{E = 4190000\ Gr.}$$

W. No. XIII.

Dimensionenbestimmungen.

$$D\left[\begin{array}{ccccccc} 761 & 744 & 730 & 725 & 724 & 727 & 729 \\ 749 & 734 & 723 & 719 & 717 & 719 & 723 \end{array}\right] A \qquad B\left[\begin{array}{ccc} 4301 & 4310 & 4315 \\ 4295 & 4303 & 4213 \end{array}\right] \mathrm{B}$$

$$D = \mathbf{730{,}2} = \mathbf{0{,}913}\ ^{\mathrm{mm}};\quad L = \mathbf{63}\ ^{\mathrm{mm}};\quad B = \mathbf{4306} = \mathbf{5{,}38}\ ^{\mathrm{mm}}.$$

$$\frac{aL}{2} = 26{,}7 = 0{,}036\ ^{\mathrm{mm}} \qquad A = 0{,}0055$$

$$\frac{aL}{2} = 4{,}26 = 0{,}0053\ ^{\mathrm{mm}} \qquad \frac{AL}{2} = 0{,}17$$

Messung der Biegungen.

Belastung	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40	Mittlere Differenzen
o v	111,3 111,2 57,9 58,1 53,4 53,1 $\sigma = -2{,}4$ **50,8** 29,6	138,3 138,0 58,6 57,9 80,3 80,1 $\sigma = +0{,}2$ **80,4** 31,1	170,1 170,2 57,0 57,4 113,1 112,8 $\sigma = -1{,}5$ **111,5** 31,1	200,3 202,8 54,6 57,4 145,7 145,4 $\sigma = -2{,}9$ **142,6**	30,6
o h	67,5 67,4 19,1 19,2 48,4 48,2 $\sigma = +1{,}0$ **49,3** 29,5	95,5 96,1 16,5 16,8 79,0 79,3 $\sigma = -0{,}4$ **78,8** 30,8	127,7 127,8 19,1 19,2 108,6 108,6 $\sigma = +1{,}0$ **109,6** 31,1	157,3 158,0 18,3 19,1 139,0 138,9 $\sigma = +2{,}2$ **141,1**	30,6
h u	144,5 144,6 97,0 97,0 47,5 47,6 $\sigma = +3{,}3$ **50,8** 30,7	178,0 178,0 96,9 97,0 81,1 81,0 $\sigma = +0{,}4$ **81,5** 31,6	209,0 209,2 96,1 96,3 112,9 112,9 $\sigma = +0{,}2$ **113,1** 30,3	235,8 236,8 95,2 96,0 140,6 140,8 $\sigma = +2{,}7$ **143,4**	30,9
u v	117,4 117,4 67,3 67,3 50,1 50,1 $\sigma = -1{,}0$ **49,1** 29,8	144,3 144,1 67,2 67,1 77,1 77,0 $\sigma = +1{,}8$ **78,9** 30,3	177,3 177,3 67,0 67,0 110,3 110,3 $\sigma = -1{,}1$ **109,2** 30,6	208,0 208,4 66,5 67,0 141,5 141,4 $\sigma = -1{,}5$ **139,8**	30,2
Mittel	**50,0** 29,9	**79,9** 30,9	**110,8** 30,9	**141,7**	30,6
berechnet .	**50,5**	**80,7**	**110,9**	**141,1**	
	— 0,5	— 0,8	— 0,1	+ 0,6	

$$\frac{\alpha}{4} = +0{,}002 \qquad \gamma = +0{,}03 \qquad \varkappa = 3{,}021$$

E = 4180000 Gr.

Gr. No. IX.

Dimensionenbestimmungen.

$$D\left[\begin{array}{ccccccc} 679{,}5 & 673{,}5 & 669{,}5 & 655 & 646 & 634 & 623 \\ 673 & 667 & 671 & 662 & 659 & 643 & 633 \end{array}\right] A \qquad B\left[\begin{array}{ccc} 3691 & 3655 & 3595 \\ 3692 & 3659 & 3596 \end{array}\right] \mathrm{B}$$

$$D = \mathbf{657{,}0} = \mathbf{0{,}821}\ ^{mm};\quad L = \mathbf{63}\ ^{mm};\quad B = \mathbf{3650} = \mathbf{4{,}56}\ ^{mm}.$$

$$\frac{aL}{2} = +\,17{,}1 = 0{,}021\ ^{mm} \qquad A = 0{,}015$$

$$\frac{aL}{2} = -\,31{,}5 = -\,0{,}039\ ^{mm} \qquad \frac{LA}{2} = 0{,}47\ ^{mm}$$

Messung der Biegungen.

Belastung		Sa + 3	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	Mittlere Differenzen
o	v	105,5 105,5 35,0 35,0 70,5 70,5 $\sigma = -2{,}5$ **68,0** 28,5	131,8 131,8 34,8 35,0 97,0 96,8 $\sigma = -0{,}4$ **96,5** 29,7	161,1 161,2 34,7 34,5 126,4 126,7 $\sigma = -0{,}4$ **126,2** 28,9	191,5 192,2 34,3 34,2 157,2 158,0 $\sigma = -2{,}5$ **155,1**	29,0
	h	74,7 74,7 8,3 8,3 66,4 66,4 $\sigma = +0{,}6$ **67,0** 28,7	104,5 104,3 8,1 8,1 96,4 96,2 $\sigma = 0$ **96,3** 28,5	130,5 130,5 7,7 7,8 122,8 122,7 $\sigma = +2{,}0$ **124,8** 29,2	159,0 159,2 7,4 7,7 151,6 151,5 $\sigma = +2{,}4$ **154,0**	28,8
u	h	95,6 95,8 26,7 26,8 68,9 69,0 $\sigma = -1{,}6$ **68,9** 29,4	123,3 123,5 26,2 26,4 97,1 97,1 $\sigma = -0{,}3$ **96,8** 29,2	149,6 150,1 26,0 26,2 123,6 123,9 $\sigma = +2{,}3$ **126,0** 29,5	181,2 181,7 25,8 26,0 155,4 155,5 $\sigma = -1{,}0$ **155,5**	29,4
	v	130,0 129,9 61,9 62,0 68,1 67,9 $\sigma = -0{,}2$ **67,8** 29,4	158,6 158,6 61,8 61,8 96,8 96,8 $\sigma = +0{,}4$ **97,2** 28,5	189,4 189,5 61,6 61,6 127,8 127,9 $\sigma = -2{,}2$ **125,7** 29,6	218,1 218,6 61,5 61,6 156,6 157,0 $\sigma = -1{,}7$ **155,1**	29,2
Mittel .		**67,6** 29,1	**96,7** 29,0	**125,7** 29,2	**154,9**	29,1
berechnet .		**67,9**	**96,9**	**125,9**	**154,9**	
		— 0,3	— 0,2	— 0,2	0	

$$\frac{a}{4} = 0 \qquad \gamma = +\,0{,}007 \qquad \varkappa = 5{,}80$$

E = 3380000 Gr.

Gr. No. X.

Dimensionenbestimmungen.

$$D\begin{bmatrix} 765 & 773{,}5 & 780{,}5 & 784 & 784{,}5 \\ 755 & 763{,}5 & 771 & 774 & 774{,}5 \end{bmatrix} A \qquad B\begin{bmatrix} 3905 & 3896 & 3890 \\ 3897 & 3881 & 3877 \end{bmatrix} B$$

$$D = 773{,}2 = 0{,}966^{\text{mm}}; \quad L = 50^{\text{mm}}; \quad B = 3891 = 4{,}86^{\text{mm}}.$$

$$\frac{aL}{2} = 16{,}0 = 0{,}02^{\text{mm}} \qquad A = 0{,}003$$

$$\frac{aL}{2} = 3{,}5 = 0{,}004^{\text{mm}} \qquad \frac{AL}{2} = 0{,}075^{\text{mm}}$$

Messung der Biegungen.

Belastung	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40	Sa + 50	Mittlere Differenzen
o v	93,7 93,7 45,9 46,0 47,8 47,7 $\sigma = (-3{,}3 - 0{,}3)$ **44,2** 17,0	110,3 110,4 45,8 45,8 64,5 64,6 $\sigma = (-3{,}1 - 0{,}3)$ **61,2** 18,8	125,0 125,2 45,3 45,7 79,7 79,5 $\sigma = (-2{,}3 - 0{,}3)$ **77,0** 16,7	139,2 139,6 45,0 45,2 94,2 94,4 $\sigma = (-0{,}3 - 0{,}3)$ **93,7**	16,5
h	125,0 125,2 79,8 79,4 45,2 45,8 $\sigma = (+0{,}8 - 1{,}0)$ **45,3** 16,1	139,5 139,4 79,8 79,8 59,7 59,6 $\sigma = (+2{,}8 - 1{,}0)$ **61,4** 16,6	156,2 156,0 79,7 79,7 76,5 76,3 $\sigma = (2{,}6 - 1{,}0)$ **78,0** 16,0	173,7 174,0 79,3 79,3 94,4 94,7 $\sigma = (0{,}4 - 1{,}0)$ **94,0**	16,2
u v	63,8 63,6 20,0 20,0 43,8 43,6 $\sigma = +1{,}3$ **45,0** 16,0	81,2 81,1 19,8 19,8 61,4 61,3 $\sigma = -0{,}4$ **61,0** 16,5	97,8 97,9 19,6 19,8 78,2 78,1 $\sigma = -0{,}6$ **77,5** 16,7	113,8 114,1 19,3 19,6 94,5 94,5 $\sigma = -0{,}3$ **94,2**	16,4
h	64,0 63,8 22,3 22,4 41,7 41,4 $\sigma = +1{,}1$ **42,7** 16,3	81,9 81,7 22,3 22,3 59,6 59,4 $\sigma = -0{,}6$ **59,0** 16,8	98,8 98,7 22,1 22,3 76,7 76,4 $\sigma = -0{,}8$ **75,8** 16,6	115,0 115,1 22,0 22,3 93,0 92,8 $\sigma = -0{,}5$ **92,4**	16,6
Mittel	**44,30** 16,4	**60,65** 16,4	**77,10** 16,5	**93,60**	16,5
berechnet .	**44,11**	**60,63**	**77,15**	**93,67**	
	+ 0,2	+ 0,1	− 0,1	− 0,1	

$$\frac{\alpha}{4} = -0{,}001 \qquad \gamma = -0{,}011 \qquad \varkappa = 1{,}652$$

E = 3420000 Gr.

Bemerkung. In den zwei ersten Reihen ist zu $\sigma - 0{,}3$ resp. $-1{,}0$ hinzugefügt. Es wurde ein Kippen der Schneide nach der Seite bemerkt und sein Einfluss ermittelt. Für die zwei letzten Reihen habe ich die Bezeichnungen h und v gegen einander vertauscht, da das ursprüngliche mir verdächtig war und einen mit dem Uebrigen sehr schlecht stimmenden Werth 3490000 gab.

Gr. No. XI.

Dimensionenbestimmungen.

$$D \left[\begin{array}{ccccccc} 743 & 750 & 759 & 763 & 762 & 757 & 746 \\ 739 & 752 & 759 & 765 & 763 & 757 & 746 \end{array}\right] A \qquad B \left[\begin{array}{ccc} 3613 & 3646 & 3656 \\ 3616 & 3649 & 3673 \end{array}\right] \mathrm{B}$$

$$D = 755{,}6 = 0{,}944\ ^{mm};\quad L = 63\ ^{mm};\quad B = 3644 = 4{,}55\ ^{mm}.$$

$$\frac{aL}{2} = -23{,}4 = 0{,}029\ ^{mm} \qquad A = 0{,}0023$$

$$\frac{aL}{2} = -18 = 0{,}022\ ^{mm} \qquad \frac{AL}{2} = 0{,}073\ ^{mm}$$

Messung der Biegungen.

Belastung	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40	Mittlere Differenzen
o v	142,6 142,6 83,0 83,1 59,6 59,5 σ = + 3,1 **62,6** 38,0	184,0 184,0 83,4 83,5 100,6 100,5 σ = 0 **100,6** 38,0	218,2 221,7 79,1 84,4 139,1 137,3 σ = + 0,2 σ = + 0,7 **138,6** 40,0	262,0 253,4 84,7 78,2 177,3 175,2 σ = 2,0 σ = 2,9 **178,6**	38,7
o h	58,8 68,5 0,7 9,1 58,1 59,4 σ = 2,6 σ = 0,5 **60,7** 36,4	106,2 105,9 9,0 8,9 97,2 97,0 σ = 0 **97,1** 36,3	139,5 139,1 8,8 8,6 130,7 130,5 σ = + 2,8 **133,4** 37,4	171,7 178,3 1,5 8,0 170,2 170,3 σ = 0,5 **170,8**	36,7
u h	128,7 128,8 68,8 68,8 59,9 60,0 σ = 0,5 **60,5** 37,1	165,8 166,1 68,5 68,7 97,3 97,4 σ = 0,3 **97,6** 37,6	204,9 204,8 68,4 68,3 136,5 136,5 σ = − 1,3 **135,2** 36,8	238,3 238,8 67,4 68,4 170,9 170,4 σ = + 1,3 **172,0**	37,2
u v	107,7 107,6 42,0 42,0 65,7 65,6 σ = − 3,0 **62,6** 36,5	140,9 141,0 41,8 41,9 99,1 99,1 σ = 0 **99,1** 37,5	180,8 180,9 41,3 41,5 139,5 139,4 σ = − 2,9 **136,6** 37,6	217,2 218,0 40,3 41,3 176,9 176,7 σ = − 2,6 **174,2**	37,2
Mittel	**61,6** 37,0	**98,6** 37,4	**136,0** 37,9	**173,9**	37,6
berechnet .	**62,0**	**99,1**	**136,2**	**173,3**	
	− 0,4	− 0,5	− 0,2	+ 0,6	

$$\frac{\alpha}{4} = -0{,}025 \qquad \gamma = -0{,}033 \qquad \varkappa = 3{,}71$$

E = 3410000 Gr.

O No. I.

Dimensionenbestimmungen.

$$D\left[\begin{array}{ccccccc} 501{,}5 & 495 & 493 & 489{,}5 & 482 & 479{,}5 & 464{,}5 \\ 496{,}5 & 492 & 492 & 489 & 481{,}5 & 476{,}5 & 468{,}5 \end{array}\right] A \qquad B\left[\begin{array}{ccc} 2269 & 2383 & 2464 \end{array}\right] \mathrm{B}$$

$$D = 486{,}2 = 0{,}608^{\,mm}; \quad L = 63^{\,mm}; \quad B = 2375 = 2{,}97^{\,mm}.$$

$$\frac{aL}{2} = 9{,}3 = 0{,}012^{\,mm} \qquad A = 0{,}006$$

$$\frac{aL}{2} = -\,21{,}6 = -\,0{,}027^{\,mm} \qquad \frac{LA}{2} = 0{,}26^{\,mm}$$

Messung der Biegungen.

Belastung	Sa	Sa + 2	Sa + 4	Sa + 6	Mittlere Differenzen
u v	239,5 239,4 81,0 81,4 158,5 158,0 $\sigma = +2{,}8$ **161,0** 48,5	290,4 290,6 80,7 80,9 209,7 209,7 $\sigma = -0{,}2$ **209,5** 48,8	336,4 336,4 80,4 80,7 256,0 255,7 $\sigma = +2{,}5$ **258,3** 48,9	386,9 387,3 79,3 80,3 307,6 307,0 $\sigma = -0{,}1$ **307,2**	48,7
u h	239,3 239,4 78,4 78,5 160,7 160,9 $\sigma = +2{,}7$ **163,5** 48,2	290,5 290,0 78,5 78,0 212,0 212,0 $\sigma = -0{,}3$ **211,7** 48,3	335,9 336,1 78,4 78,4 257,4 257,7 $\sigma = +2{,}5$ **260,0** 48,7	387,0 387,0 78,0 78,2 309,0 308,8 $\sigma = -0{,}2$ **308,7**	48,4
o h	257,2 256,9 99,2 99,1 158,0 157,8 $\sigma = +2{,}8$ **160,7** 48,8	308,1 308,5 98,8 99,1 209,3 209,4 $\sigma = +0{,}1$ **209,5** 48,1	353,2 353,4 98,9 98,8 254,3 254,6 $\sigma = +3{,}1$ **257,6** 49,2	404,0 404,6 97,2 98,0 306,8 306,6 $\sigma = 0{,}1$ **306,8**	48,7
o v	205,2 205,2 38,1 38,2 167,1 167,0 $\sigma = -2{,}8$ **164,2** 48,5	249,9 250,0 38,0 38,0 211,9 212,0 $\sigma = +0{,}7$ **212,7** 49,1	302,7 302,6 38,1 38,0 264,6 264,6 $\sigma = -2{,}8$ **261,8** 47,8	346,0 346,9 37,1 37,6 308,9 309,3 $\sigma = +0{,}5$ **309,6**	48,5
Mittel	**162,4** 48,5	**210,9** 48,5	**259,4** 48,7	**308,1**	48,6
berechnet .	**162,5**	**211,0**	**259,5**	**308,0**	
	— 0,1	— 0,1	— 0,1	+ 0,1	

$$\frac{\alpha}{4} = +\,0{,}0025 \qquad \gamma = -\,0{,}029 \qquad \varkappa = 24{,}25$$

E = 3150000 Gr.

0 No. III.

Dimensionenbestimmungen.

$$D \begin{bmatrix} 523 & 524 & 523 & 528 & 534 & 546{,}5 & 560{,}0 \\ 521 & 523 & 524 & 528 & 534 & 548{,}5 & 559 \end{bmatrix} A \qquad B \begin{bmatrix} 2743 & 2723 & 2730 \\ 2751 & 2716 & 2730 \end{bmatrix} B$$

$$D = 533{,}1 = 0{,}666^{mm}; \quad L = 63^{mm}; \quad B = 2729 = 3{,}41^{mm}.$$

$$\frac{aL}{2} = -5{,}1 = 0{,}006^{mm} \qquad A = 0{,}013$$

$$\frac{aL}{2} = +32{,}7 = 0{,}041^{mm} \qquad \frac{AL}{2} = 0{,}410^{mm}$$

Messung der Biegungen.

Belastung	Sa	Sa + 3	Sa + 6	Sa + 9	Mittlere Differenzen
o v	155,5 155,4 / 50,9 50,6 / 104,6 104,8 $\sigma = -0{,}4$ **104,7** 46,9	205,4 206,0 / 50,7 50,8 / 154,7 155,2 $\sigma = -3{,}3$ **151,6** 47,9	250,1 250,1 / 50,5 50,7 / 199,6 199,4 $\sigma = 0$ **199,5** 48,4	301,3 301,4 / 49,8 50,2 / 251,5 251,2 $\sigma = -3{,}5$ **247,9**	47,7
o h	202,7 202,5 / 95,9 95,9 / 106,8 106,6 $\sigma = 0$ **106,7** 46,7	246,0 246,0 / 96,0 95,9 / 150,0 150,1 $\sigma = 3{,}3$ **153,4** 46,9	296,8 296,8 / 96,4 96,5 / 200,4 200,3 $\sigma = 0$ **200,3** 47,3	340,3 340,7 / 95,6 96,2 / 244,7 244,5 $\sigma = +3{,}0$ **247,6**	47,0
u v	196,9 196,9 / 91,9 92,0 / 105,0 104,9 $\sigma = 0$ **104,9** 46,9	240,4 240,5 / 91,5 91,8 / 148,9 148,7 $\sigma = 3{,}0$ **151,8** 47,1	290,6 290,5 / 91,6 91,7 / 199,0 198,8 $\sigma = 0$ **198,9** 46,0	333,8 334,3 / 91,4 92,0 / 242,4 242,3 $\sigma = 2{,}5$ **244,9**	46,7
u h	195,5 195,5 / 89,0 88,9 / 106,5 106,6 $\sigma = 0$ **106,5** 48,1	240,6 240,5 / 89,0 88,9 / 151,6 151,6 $\sigma = 3{,}0$ **154,6** 48,5	292,0 292,1 / 89,0 88,9 / 203,0 203,2 $\sigma = 0$ **203,1** 48,1	337,3 337,5 / 89,1 89,0 / 248,2 248,5 $\sigma = 2{,}8$ **251,2**	48,2
Mittel	**105,7** 47,1	**152,8** 47,7	**200,5** 47,4	**247,9**	47,4
berechnet .	**105,7**	**153,1**	**200,4**	**247,8**	
	0	− 0,3	+ 0,1	+ 0,1	

$$\frac{\alpha}{4} = +0{,}003 \qquad \gamma\ 0{,}028 \qquad \varkappa\ 15{,}783$$

E = 3220000 Gr.

O No. IV.

Dimensionenbestimmungen.

$$D\begin{bmatrix} 747{,}5 & 715{,}5 & 706{,}0 & 702{,}5 & 706 \\ 734 & 715{,}5 & 704{,}5 & 701 & 706{,}5 \end{bmatrix}A \qquad B\begin{bmatrix} 2693 & 2721 & 2733 \\ 2685 & 2706 & 2731 \end{bmatrix}B$$

$D = 712{,}4 = 0{,}89$ mm; $L = 50$ mm; $B = 2711 = 3{,}64$ mm.

$\frac{aL}{2} = 36 = 0{,}045$ mm $\qquad A = 0{,}0086$

$\frac{aL}{2} = 1 = 0{,}001$ mm $\qquad \frac{AL}{2} = 0{,}215$ mm

Messung der Biegungen.

Belastung	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40	Mittlere Differenzen
v	146,9 147,2	183,3 183,5	216,5 216,3	244,3 245,6	
	94,8 94,9	94,9 94,9	95,0 94,9	93,8 95,1	
	52,1 52,3	88,4 88,6	121,5 121,4	150,5 150,5	
	$\sigma = +3{,}4$	$\sigma = 0{,}1$	$\sigma = 0{,}4$	$\sigma = 3{,}3$	
	55,6 33,0	**88,6** 33,2	**121,8** 32,0	**153,8**	32,7
o	132,4 132,3	163,9 163,7	200,6 200,7	229,9 230,8	
	80,1 80,1	77,4 77,4	80,1 80,2	79,0 80,0	
	52,3 52,5	86,5 86,3	120,5 120,5	150,9 150,8	
	$\sigma = +2{,}1$	$\sigma = +1{,}6$	$\sigma = -0{,}1$	$\sigma = +1{,}8$	
h	**54,5** 33,5	**88,0** 32,4	**120,4** 32,3	**152,7**	32,7
v	70,7 70,6	105,3 105,3	135,7 135,4	169,8 170,2	
	15,2 15,3	15,2 15,0	14,9 15,0	14,0 14,7	
	55,5 55,3	90,1 90,3	120,8 120,4	155,8 155,5	
	$\sigma = 0{,}8$	$\sigma = -0{,}2$	$\sigma = 2{,}3$	$\sigma = 0{,}9$	
	56,2 33,8	**90,0** 32,9	**122,9** 33,5	**156,4**	33,4
u	59,0 59,2	94,1 94,1	125,0 125,8	154,0 156,2	
	6,8 7,3	6,9 6,9	6,5 6,7	4,4 6,5	
	52,2 51,9	87,2 87,2	118,5 119,1	149,6 149,7	
	$\sigma = 2{,}4$	$\sigma = -0{,}1$	$\sigma = +1{,}0$	$\sigma = +2{,}9$	
h	**54,4** 32,7	**87,1** 32,7	**119,8** 32,7	**152,5**	32,7
Mittel	**55,2** 33,2	**88,4** 32,8	**121,2** 32,6	**153,8**	32,9
berechnet .	**55,1**	**88,1**	**121,1**	**154,1**	
	+ 0,1	+ 0,3	+ 0,1	— 0,3	

$\frac{\alpha}{4} = -0{,}02 \qquad \gamma = +0{,}027 \qquad \varkappa = 3{,}30$

E = 31860000 Gr.

Von den Stäbchen der II. Serie war nur **O.** II benutzbar, nachdem es neu abgeschliffen worden war; und die Aenderung seines Elasticitätsmoduls von 2710000 Gr. in 3150000 Gr. ist der schlagendste Beweis für die Annahme, dass die Unreinheit der Oberfläche die Ursache der Nichtübereinstimmung der II. Serie mit der ersten sei. Das Stäbchen **Gr.** III zeigte auch nach der Neupolitur tiefer gehende Flecke und demgemäss einen Elasticitätscoefficienten = etwa 2900000 und ist darum aus der Serie ausgeschlossen worden.

Da, wie oben erwähnt, der Elasticitätscoefficient in den 3 hier untersuchten Richtungen Maxima resp. Minima erreicht, so ist der Einfluss der Abweichung der Axe der Stäbchen von der geforderten Richtung (ihre Grösse siehe § 5) für diese 3 besonders klein. Abweichungen von 30′ nach irgend einer Richtung modificiren erst die 4. Stelle des Coefficienten von N, sind also ohne Einfluss auf die angegebenen Werthe. Darum benutze ich ohne weiteres das Mittel aus den oben angeführten Werthen zur Berechnung von M und N. Dasselbe folgt aus:

W. XI	4,14 Mill.	**Gr.** IX	3,38 Mill.	**O.** I	3,15 Mill.
XII	4,19 „	X	3,42 „	III	3,22 „
XIII	4,18 „	XI	3,41 „	IV	3,19 „
W.	4170000	**Gr.**	34030000	**O.**	3185000.

Alle 3 Zahlen haben gleiches Gewicht, wegen der gleichen Anzahl der sie bestimmenden Beobachtungen. In die Gleichung

$$\frac{1}{E} = M + N\,[cos^4\,(ax) + cos^4\,(ay) + cos^4\,(az)]$$

eingeführt folgt:

$$M = \frac{0{,}3502}{1000000} \quad N = \frac{-0{,}1106}{1000000}$$

(in naher Uebereinstimmung mit den Werthen aus der ersten Serie $M = \frac{0{,}354}{1000000}$ $N = \frac{-0{,}100}{1000000}$.)

Daraus rückwärts die 3 Elasticitätscoefficienten bestimmt und mit den obigen verglichen ergiebt

ber.	**W.** 4174000;	**Gr.** 3391000;	**O.** 3192000
beo.	4170000;	3403000;	3185000
Fehler	$+\frac{1}{1000}$	$+\frac{1}{300}$	$+\frac{1}{450}$.

Es erübrigt noch die Reduction der Gramme auf Atmosphärendruck; durch diese Berechnung findet sich:

$$M = \frac{3{,}593}{1000000} \quad N = \frac{-1{,}135}{1000000}.$$

W. 406800 Atm. **Gr.** 330500 Atm. **O.** 311100 Atm.

Zur Vergleichung führe ich die Elasticitätscoefficienten einiger anderer Substanzen an; derselbe ist

für Eisen	= 4000000	Atmosphären
Kupfer	= 2900000	„
Blei	= 440000	„
Glas	= 1300000	„
Marmor	= 506000	„
Holz	= 39000	„

Die Sicherheit der gefundenen Zahlenwerthe ist nur so gross, als die, dass die Oberfläche der Substanz in der Zeit von der Anfertigung der Stäbchen bis zur Beobachtung unverändert geblieben ist. Diese Zeit war kurz, — nur wenige Tage, und ist bei dem Handhaben der Stäbchen die möglichste Vorsicht angewandt worden; auch zeigt der Augenschein keine Trübung der Politur; dennoch sind Zweifel bei dem enormen Einfluss selbst einer sehr kleinen Aenderung nur zu berechtigt. Die beste Garantie für den Werth der gefundenen Constanten scheint mir die Uebereinstimmung der Zahlen für die Stäbchen derselben Gattung zu sein; denn obgleich die Stäbchen verschieden lange im Terpentinöl gelegen hatten, ist die grösste Abweichung unter ihnen $= \frac{1}{46}$. So gross darf daher auch die Sicherheit der Constanten M und N zum Mindesten geschätzt werden.

(Ich füge anmerkungsweise eine Uebersicht der Resultate der III. Serie bei, falls die Correctionen γ wegen der Gestalt auf die früher angedeutete Weise berechnet sind.

W. XI	426	**Gr.** IX	336	**O.** I	315
XII	425	X	342	III	325
XIII	418	XI	338	IV	320
	4230000		3387000		3200000.

Sie stimmen unter sich schlechter als die oben angeführten und darin liegt ein Beweis, dass die oben angewandte Methode der Berechnung die bessere ist.

Die letzteren verglichen mit den berechneten:

	4225000	3399000	3192000
geben Fehler =	$-\frac{1}{880}$	$+\frac{1}{280}$	$-\frac{1}{400}$

stimmen also mit der Theorie sehr gut, für die die Constanten (auf Gramme bezogen):

$$M = \frac{0{,}3516}{1000000} \quad N = -\frac{0{,}1150}{1000000}$$

folgen.)

IV. Abschnitt.

Untersuchung, innerhalb welcher Grenzen die elastische Biegung proportional der Belastung ist.

§ 13.

Die Beobachtungsmethode.

Da man gewohnt ist, die elastischen Biegungen immer mit einem gewissen Vorbehalt der Belastung proportional anzunehmen und die Entscheidung, innerhalb welcher Grenzen meine Beobachtungsmittel keine merklichen Abweichungen erkennen liessen, sowohl an und für sich von Interesse, als auch für die begonnenen Untersuchungen: die Bestimmung der Elasticitätscoefficienten und die Erforschung der Rückstandsverhältnisse von Wichtigkeit war, gab ich mich an die Behandlung der Frage. Die erste Untersuchung derselben rührt, soviel ich weiss, von Coulomb her und ergab, dass der Elasticitätscoefficient des Stahles durch die verschiedensten Behandlungsarten, als Glühen, Härten, Schmieden u. dergl. sich nicht ändert. (Biot traité de physique.) Eine zweite von Lagerhjelm (Pogg. Ann. XIII) angestellte hat dies vollständig bestätigt, dagegen die Dilatationen innerhalb der Elasticitätsgrenze der Belastung nicht vollständig proportional gefunden.

Die Frage scheint mir eine doppelte zu sein: 1. ob innerhalb der Elasticitätsgrenze (die ich gemäss § 1 definirt denke), die Proportionalität gewahrt wird und 2. ob eine Erweiterung der Elasticitätsgrenze auf die Grösse der elastischen Biegung für dieselbe Belastung einen Einfluss hat.

Ich bediente mich folgender beiden Beobachtungsmethoden: entweder wurden ebenso, wie bei der Bestimmung der Elasticitätscoefficienten, Gewichte mit grosser Vorsicht aufgelegt und entfernt, wie sich dies bei nicht zu grossen Biegungen mit bestem Erfolg thun liess, weil dann die Ablesungen an der Mikrometerschraube sicher waren, oder es wurde, wo dies wegen sehr grosser Biegungen nicht mehr zulässig war, das Gewicht auf der Waagschaale durch langsamen Zufluss von Wasser bis zu einem gewünschten Punkt vermehrt und dann ein gewisses Gewichtstück durch eine passende später II § 2 als „Einsenkungsapparat“ beschriebene Vorrichtung ohne jede Erschütterung abgehoben. Dies Verfahren, nach verschiedener Vermehrung der Belastung wiederholt, gestattete Messungen des Einflusses einer Erweiterung der Elasticitätsgrenze auf die elastische Biegung. Wurde jedoch, nach der Erreichung irgend eines Punktes, durch Ablassen des Wassers die Belastung vermindert und nun das Abnehmen des Gewichtes wiederholt, so gestattete dies die Messung derselben Biegung bei verschiedenen Belastungen innerhalb der Elasticitätsgrenze. Ueber die Vorsichtsmassregeln zur Vermeidung des Einflusses der Verdunstung und sonstige Kunstgriffe bei der Behandlung des zufliessenden Wassers ist II § 2 ausführlich gesprochen.

Ich gehe zum ersten Theil der Frage:

§ 14.

Ist die Proportionalität innerhalb der Elasticitätsgrenze eine vollständige?

Die Resultate der ersten Beobachtungsmethode liegen in den Messungen zur Bestimmung des Elasticitätscoefficienten. Ich stelle zu dem Zwecke die beobachteten Abweichungen von der Proportionalität aus den Beobachtungsresultaten in § 11 und 12 hier noch einmal kurz zusammen; die Werthe sind zu beobachteten Werthen hinzuzuaddiren, um Proportionalität zu erlangen; sie sind in Trommeltheilen $= \frac{1}{800}$ Millimeter ausgedrückt.

II. Serie.

W.	II.	+1,1	+0,8	+0,3	−0,8.		
	III.	+0,8	+0,7	+0,3	−0,2	−0,2	
	V.	+0,9	+0,4	+0,2	−1,2		
	VII.	+1,0	+0,6	+0,3	+0,4	−0,5	−0,7
	VIII.	+0,4	+0,6	−0,3	−0,4		
	IX.	+0,6	+0,6	+0,6	0	−0,4	
Pw. $11\frac{1}{4}^0$	No. I.	+0,1	+0,2	+0,5	0		
Pw. $22\frac{1}{2}^0$	No. III.	+1,0	+0,1	+0,7	+0,5	−0,8	
	IV.	−1,1	−1,7	−2,1	+3,5	−3,5	
Pw. $33\frac{3}{4}^0$	No. I.	+0,3	+0,4	0	−0,2		
	II.	+0,3	+0,1	−0,5	+0,2		
	III.	−0,1	+0,1	−0,1	0		
	IV.	+0,1	+0,1	−0,2	+0,2	+0,1	
Gr.	No. I.	0	0	0	+0,1	−0,5	−0,5
	II.	+0,8	+0,4	0	−0,1	−0,4	
	III.	+0,6	0	−0,2	−0,4	0	+0,1
	IV.	0	+0,3	+0,1	0	−0,1	−0,2
O.	No. I.	−0.4	+0,5	+0,2	−0,3	−0,2	
	II.	+0,8	+0,3	0	+0,2	−0,7	

III. Serie.

W.	XI.	−0,1	+0,2	+0,1	−0,3
	XII.	−0,1	−0,1	−0,6	+0,2
	XIII.	+0,5	+0,8	+0,1	−0,4

Gr.	IX.	+ 0,3	+ 0,2	+ 0,2	0
	X.	— 0,2	0	+ 0,1	+ 0,1
	XI.	+ 0,4	+ 0,5	+ 0,2	— 0,6
O.	I.	+ 0,1	+ 0,1	+ 0,1	— 0,1
	III.	0	+ 0,3	— 0,1	— 0,1
	IV.	— 0,1	— 0,3	— 0,1	+ 0,3

Von diesen 28 Reihen Differenzen zeigen 16 eine erklärte Neigung mit wachsender Belastung zum Negativen hin, die 12 übrigen hingegen ein Auf- und Abschwanken, das eher die vollständige Proportionalität, als eine Abweichung nach der einen oder andern Seite vermuthen lässt. Diese Beobachtungen würden demnach für eine äusserst geringe Zunahme der elastischen Biegung für dasselbe Gewicht bei wachsender Belastung sprechen. Eine Schätzung dieser Aenderung ist nicht möglich, darum habe ich auch hier die ganzen Biegungen nicht beigeschrieben, auf die sich die Fehler beziehen; sie sind in § 11 und 12 aufgeführt.

Die Beobachtungen nach der 2. Methode bestätigen nur, dass die Aenderungen selbst bei sehr grossen betrachteten Intervallen nur gering sein können. Ich bezeichne mit B die der gesammten Belastung entsprechende elastische Biegung, mit β das dem abgenommenen Gewicht entsprechende Theil; so war bei:

O. No. I.	für	B =	400	300	200		
		β =	93,1	93,3	92,8		
Pw. $33^3/_4$ No. III.	für	B =	360	290	210	130	90
		β =	81,1	83,5	83,5	82,9	83,2
O. No. II.	für	B =	260	300	210	120	
		β =	76,6	77,6	77,8	77,8	

Die Resultate sind nicht so sicher, wie die vorigen, denn jene sind immer das Mittel aus den Beobachtungen des Stäbchens in den 4 Lagen und hier mag auch noch bei den Messungen an so verschiedenen Stellen der Schraube die Correction wegen ihrer Fehler deren Ungenauigkeiten nicht vollständig eliminirt haben. Ich folgere also, dass, wenn überhaupt innerhalb der Elasticitätsgrenze eine Abweichung von der Proportionalität stattfindet, diese nur eine sehr geringe Vergrösserung der elastischen Biegung für wachsende Belastung geben kann. (Das hiermit im Widerspruch stehende Resultat von Herrn Lagerhjelm in Pogg. Ann. 13 erklärt sich ungezwungen dadurch, dass von ihm die Beobachtung angestellt worden sein mag, noch ehe die bleibende Dehnung mit der Zeit unveränderlich geworden war, wenigstens habe ich eine Erwähnung des bei grossen Biegungen sehr bedeutenden Einflusses der Zeit nicht gefunden. Ich habe oft bei grossen Biegungen bemerkt, dass in der kurzen Zeit vom Ablesen bis zur vollständigen Entlastung der Rückstand eine merkliche Aenderung erlitt und die Messung demgemäss einen zu kleinen Werth der elastischen Biegung ergab. Ein zu grosser wird durch den Rückstand in keiner Weise erklärt und ist mir darum zuverlässiger als das Gegentheil. Um diesen Einfluss des Rückstandes zu vernichten, habe ich das Stäbchen immer eine geraume Zeit belastet gelassen, bevor ich ablas, und ausserdem durch Wiederholung des Versuches mich überzeugt, dass der Rückstand keine nennenswerthe Aenderung erlitten hatte.)

Ich komme zum zweiten Theil der Frage:

§ 15.

Hat eine Erweiterung der Elasticitätsgrenze eine Aenderung der, einem bestimmten Gewicht entsprechenden, elastischen Biegung zur Folge?

Zur Beantwortung verglich ich bei der ersten Beobachtungsmethode die Werthe der bei dem successiven Durchbiegen des Stäbchens für wachsende Gewichte gefundenen Biegungen mit den nach der Durchbiegung mit dem Grössten sichergebenden — d. h. also die Elasticitätsgrenze für ein bestimmtes Gewicht mit der ihm entsprechenden elastischen Biegung in einer grösseren Elasticitätsgrenze. Die Resultate sind folgende:

W. II.	*lo*	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15
Elasticitätsgrenze:		111,0	159,4	209,6
Biegung:		110,5	159,9	209,3
	ru	+ 0,5	— 0,5	+ 0,3
		116,3	165,3	218,0
		117,0	166,8	216,6
		— 0,7	— 1,5	+ 1,4

W. VII.	*lu*	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	Sa + 25
		64,3	92,2	121,0	147,6	176,5
		63,7	91,7	119,8	147,9	175,9
		+ 0,6	+ 0,5	+ 1,2	— 0,3	+ 0,6

Gr. II.	*lu*	Sa	Sa + 10	Sa + 20
		74,4	189,4	303,7
		75,8	189,6	303,4
		— 1,4	— 0,2	+ 0,3
	lo	76,1	189,0	302,7
		75,2	189,1	303,0
		+ 0,9	— 0,1	— 0,3

		Sa + 10	Sa + 20	Sa + 20
Gr. IV.	*ru*	100,3	162,1	224,8
		100,5	162,4	224,3
		— 0,2	— 0,3	+ 0,5
	lo	102,8	165,3	226,6
		103,2	165,0	226,8
		— 0,4	+ 0,3	— 0,2
	lu	104,3	169,7	228,9
		104,1	166,1	228,1
		+ 0,2	+ 0,6	+ 0,8
	ro	102,0	165,1	231,4 (?)
		102,0	164,4	226,8
		0	+ 0,7	(?)

Es haben sich unter 28 Beobachtungen (indem ich die letzte ganz unsichere weglasse), 15 gefunden, wo die Elasticitätsgrenze grösser ist, als die demselben Gewicht entsprechende Biegung in der Elasticitätsgrenze, 12 wo sie kleiner, 1 wo sie gleich ist. Da nun die einzige Fehlerquelle (— der noch nicht völlig von der Zeit unabhängige Rückstand —) die Elasticitätsgrenze nur zu klein erscheinen lassen kann, so schliesse ich Folgendes: Wenn die Elasticitätsgrenze für eine Belastung von der elastischen Biegung für dieselbe Belastung in einer grösseren Elasticitätsgrenze verschieden ist, so wird sie nur um ein Geringes grösser sein. Dies enthält eine Bestätigung des früheren Resultates.

Die eigentliche Frage nach der Aenderung der elastischen Biegung mit wachsender Elasticitätsgrenze zu beantworten, müssen wir jede Reihe zusammen in's Auge fassen. Es zeigt sich aber nicht consequent ein Ab- oder Zunehmen der hingeschriebenen Differenzen. Die Mehrzahl scheint allerdings zu wachsen, und dies zusammengehalten mit dem Einfluss, den der Rückstand auf die Bestimmung der Elasticitätsgrenze hat, lässt auch hier vermuthen, dass durch weiteres Hinausschieben der Elasticitätsgrenze die elastische Biegung um ein äusserst geringes zunimmt.

Die Beobachtungen nach der 2. Methode bestätigen dies zwar nicht durchweg, zeigen aber wiederum, dass auch bei ausserordentlich grossen Intervallen die Aenderung sehr klein ist. Die Werthe für die allergrössten Biegungen sind hier ganz besonders unsicher, weil nach viertelstündigem Belasten sich der Rückstand noch sehr schnell mit der Zeit änderte; die Stäbchen aber so stark gespannt viel länger der Gefahr des Zerbrechens durch eine kleine Erschütterung auszusetzen, schien mir für diese mehr nebensächliche Untersuchung zu viel gewagt. Die Resultate sind, ausgedrückt in derselben Bezeichnung, wie im ersten Theil:

O. No. I. für	B =	98	196	247	286,5				
	β =	92	92	93	93,5				
für	B =	322,5	376,5	407	438				
	β =	90,8	89	90,5	91,5				
Pw. $33^3/_4{}^0$ III. für	B =	100	200	296	378				
	β =	82,7	82,6	83,1	83,6				
Pw. $33^3/_4{}^0$ III. für	B =	95	266	300	342	378	418	456	
	β =	84,5	83,8	83,7	84,3	83,7	84,1	83,3	
O. II. für	B =	99	187	270	337	378			
	β =	75,3	76,4	76,7	76,3	77,4			
B	96,3	191	277	375	436	473	505	542	(558 588)?
β	78,3	77,3	77,2	77,0	77,6	76,4	75,0	76	(75 74)?

Bei dieser 2. Methode machen die Werthe von B keinen Anspruch auf Genauigkeit, da sie die Grenze überschreiten, wo ich der Mikrometerschraube völlig vertraue; sie sind auch gar nicht von Wichtigkeit.

Ich lege dem nach den letzten Zahlenwerthen scheinbar stattfindenden Abnehmen von β keinen grossen Werth bei, auch deshalb, weil bei den folgenden Beobachtungen des Rückstandes, bei denen oft zugleich die Biegung ganz in der Nähe und die Belastung für den Moment des Brechens beobachtet wurde, sich die aus dem Gewicht berechnete elastische Biegung nie kleiner als die kurz zuvor beobachtete ergeben hat. (Siehe z. B. **Pw.** $11^1/_2{}^0$ I.)

Darum erhalte ich auch diesen letzten nicht völlig bestätigenden Resultaten gegenüber die Vermuthung aufrecht, dass, wenn eine Aenderung der Biegung durch das Hinausschieben der Elasticitätsgrenze geschieht, diese eine äusserst geringe Vergrösserung ist, die ich aber sowohl bei der Bestimmung der Elasticitätscoefficienten, als bei der Untersuchung des Rückstandes zu vernachlässigen mich für berechtigt halte.

V. Abschnitt.

Der Einfluss der Temperatur auf die elastische Biegung.

§ 16.

Die Beobachtungsmethode.

Die Stäbchen **Gr.** No. I, III, IV und **O.** No. I waren, bevor die Fehler der Mikrometerschraube entdeckt waren, bereits beobachtet worden, und die Messungen stimmten in sich gut, sodass ich ihnen einige Zuverlässigkeit beilegte; als ich dieselben aber unter Berücksichtigung der Correction der Schraube wiederholte, fanden sich so erheblich andere Werthe, dass der Fehler der Schraube unmöglich die Ursache sein konnte. Da aber die erstere Reihe Versuche in der heissesten Sommerszeit, die 2. im Herbst und in sehr kaltem (9° R.) Locale vorgenommen war, so war meine Vermuthung, dass der Einfluss des Temperaturunterschiedes von 15—20° diese Abweichung der beiden Resultate verursacht hätte. Das veranlasste mich, diesen Einfluss direct zu studiren; dass sich mit den mir zu Gebote stehenden Mitteln wesentlich mehr, als nur eine Correction des angedeuteten Fehlers ergeben würde, war jedoch nicht zu erwarten.

Um das belastete Stäbchen einer höheren Tempera-

tur auszusetzen, wurde dasselbe in einen kupfernen Kasten (siehe Fig. 12) eingeschlossen, über welchem sich ein Wasserbassin (*WW*) befand, dass durch ein hindurch geführtes Schlangenrohr, durch welches Wasserdämpfe strichen, erhitzt wurde; ein Thermometer τ_2 stand in demselben, ein zweites τ_1 lag in dem Luftraum unter dem Stäbchen, seine Mittelpunktsentfernung vom Stäbchen verhielt sich zu der vom kupfernen Deckel wie 3 : 4; indem ich nun annehmen konnte, dass die Temperatur im Luftraum eine lineäre Function der Höhe sei, konnte ich aus gleichzeitigem Ablesen beider Thermometer die Temperatur des Stäbchens hinreichend genau bestimmen. [Die Schneiden $\sigma\sigma$, auf denen das Stäbchen ruhte, mussten von Glas sein, damit sie nicht kälter als die Umgebung würden, beschlügen und das Stäbchen verletzten: der Sicherheit halber belegte ich sie hart an der obern Kante mit einem Stückchen Silberblech, das durch mehrere Silberdräthe mit dem heissesten Theil der Kupferwand, der Decke, in leitender Verbindung stand. Die Erfahrung gebot diese Vorsicht.] Der ganze Kupferkasten war mit Tuch überzogen und nirgends mit einem guten Leiter in Berührung, da er ganz auf den gläsernen Schneiden ruhte. Dadurch gelang es, das obere Thermometer auf 78,5° R. zu bringen, das untere auf 62,5°, also dem Stäbchen eine Temperatur von 74,5° mitzutheilen. Zum Ablesen waren nun nicht mehr Spinnen- oder Schellackfäden zu benutzen; ich brachte daher an der Schneide ein dünnes Glimmerblättchen an, auf welches mit scharfem Messer parallele Linien in $\frac{1^{mm.}}{30}$ gegenseitiger Entfernung gezogen waren. Diese waren durch eine angebrachte kleine Spiegelscheibe gut zu beobachten.

Es wurde dann eine Beobachtung vor dem Erhitzen gemacht, nach der Erreichung des Maximums eine weitere, die Wärmezufuhr immer mehr verringert und während des langsamen Abkühlens die weitern Messungen vorgenommen.

§ 17.

Die Resultate.

Es fand sich entsprechend

O. No. II.	13,5° R.	B = 206,0
	69,3°	212,5
	63,0°	211,8
	52,7°	211,0
	45,2°	211,0
	35,0°	211,4
	32,3°	209,2
	28,8°	209,1
	25,8°	208,0

Hieraus folgt, wenn man

$$B = B_0 (1 + \alpha t)$$

setzt: $\alpha = 0{,}000518$ nebenbei: $(B_0 = 205{,}6)$

Gr. No. III.	15°	B = 304,5
	74,5°	313,8
	74,5°	314,0
	67,0°	312,5
	59,0°	310,8
	51,0°	310,0
	41,0°	308,3
	31,5°	305,2 (?)
	26,8°	306,7
	18°	304,4
	16°	304,8

Hieraus $\alpha = 0{,}000531$ $(B_0 = 301{,}7)$

Eine Wiederholung ergab

Gr. III.	61,2°	B = 415,0
	56,0°	413,2
	53,0°	412,2
	49,0°	411,9
	45,0°	411,2
	38,6°	410,6
	35°	408,7
	31,5°	408,7

Hieraus $\alpha = 0{,}000538$ $(B_0 = 401{,}4)$

Pw. $22\frac{1}{2}$° No. IV.

15,0°	B = 208,0
74,3°	220,4
74,1°	219,6
66,5°	218,4
54,7°	215,5
47,1°	213,6
40,0°	212,6
30,2°	211,8
20,3°	210,0

Hieraus $\alpha = 0{,}000815$ $(B_0 = 206{,}4)$

W. No. XII.	73,5°	B = 174,6
	73,5°	174,1
	65°	172,4
	56°	171,0
	42°	168,7
	29°	165,5
	24°	164,0

Hieraus $\alpha = 0{,}00125$ $(B_0 = 159{,}7)$

[Zu bemerken ist, dass bei der Berechnung der Werthe von α die Aenderung der Dimensionen des Stäbchens vernachlässigt ist, was, so lange es sich nur um ein Urtheil über die Grösse einer anzubringenden Correctur handelt, erlaubt ist.] Es scheint nach diesen Zahlenwerthen von α, dass der kleinere Elasticitätsmodul auch

die relativ kleinere Aenderung mit der Temperatur erfährt. Genaueres scheint mir aus derartigen Beobachtungen kaum abzuleiten möglich, und darum habe ich den Gegenstand vorläufig nicht weiter verfolgt. [Uebrigens sind die empirischen Curven von der Art, dass die lineäre Fortschreitung von B mit t wohl ausser Zweifel ist.] Stelle ich die sich entsprechenden Werthe der Biegung für ein Gramm Belastung, wie dieselben sich für dieselben Stäbchen bei der I. und II. Beobachtung fanden, zusammen, so sieht man aus der Tabelle:

Gr. No. I.	III.	IV.	O. No. I.*)
1) $\varkappa = 2{,}35$	31,20	6,17	23,72
2) $\varkappa = 2{,}32$	30,14	6,16	23,64

dass, wenn man zu der 2. Reihe gemäss den obigen Zahlen $\varkappa\, t$ 0,0005 hinzufügt, wo t zwischen 15 und 20° liegen mag, die Abweichungen kleiner werden und zwar einige +, einige — (wie das sich dadurch erklärt, dass bei der ersten Serie Beobachtungen die Correction der Schraube nicht angewandt ist). Es kommt nämlich:

	Gr. No. I.	III.	IV.	O No. I.
2. Ser.	$\varkappa_r = 2{,}34$	30,5	6,2	23,8

Da in der 2. Serie ausser **Gr.** I, III, IV und **O.** II auch **W.** II, III, V in der etwa um 8° kältere Luft beobachtet sind, als die übrigen alle, die in einem ziemlich constant zwischen 13° und 15° erhaltenem mir gütigst angewiesenem Auditorium der Universität gemessen wurden, so ist zu den direct beobachteten Werthen von $\varkappa$ bei der Berechnung der Elasticitätscoefficienten, bei diesen Stäbchen eine gemäss den obigen Werthen berechnete Correction (ϑ) gefügt.

VI. Abschnitt.

Die Beobachtung der elastischen Nachwirkung.

§ 18.

Die elastische Nachwirkung, während das Stäbchen völlig in Ruhe bleibt.

Wenige Messungen der nach der Entlastung zurückbleibenden dauernden Biegungen zeigten, dass deren Aenderungen mit der Zeit, auch wenn diese Biegungen verhältnissmässig ausserordentlich gross sind, mit den mir zu Gebote stehenden Mitteln nicht beurtheilt werden konnten und sicher ohne Einfluss auf meine Messungen der elastischen Biegung waren.

Ich theile eine Beobachtungsreihe mit, die am Stäbchen **W.** No. IX vorgenommen ist, und bezeichne, wie in den Tabellen, die von den Messungen des Rückstands herrühren, die sich entsprechenden Rückstände und elastischen Biegungen resp. mit R und B. Die Einheiten sind Trommeltheile der Schraube. Der erste Zeitmoment bei jedem B stellt den der Belastung, der 2. den der Entlastung dar, von ihm begannen die Messungen des Rückstandes. Seine Aenderung ist die sog. elastische Nachwirkung.

So fand sich ausgehend vom Anfangspunkt auf der Trommel

15,8 für

$t = 11^h\,40'$ und B = 48,5, R = 1,6 nach der Entlastung zur Zeit

$t = 11^h\,48'$	17,4	
$= 12^h\,\;4'$	17,4	
	21,5	
	22,6	
		B = 94,2; R = 5,8
	24'	
	32'	27,2
	42'	27,2
		B = 138,6; R = 11,4
	44'	
	54'	36,3
1^h	5'	35,8
		B = 179,5; R = 20,5
	6'	
	17'	48,8
	27'	47,7
		B = 217; R = 33
	30'	
	44'	67,6
	55'	67,1
		B = 248,2; R = 51,8
	58'	
2^h	11'	95,7
	28'	94,9
	40'	94,6
		B = 270; R = 80.
	43'	
	56'	131,0
3^h	14'	130,0
	27'	129,3
	44'	128,9
4^h	20'	128,5
21^h		127,6

und entsprechend weiter:

Es ist klar, dass bei Beobachtungsmitteln, die bei einmaliger Beobachtung 0,5 im Zweifel lassen, aus Werthen

*) hierfür war die Differenz nur 12° R.

von der angegebenen Ordnung kein Schluss über das Gesetz der Abhängigkeit der elastischen Nachwirkung von der Zeit und der vorhergegangenen Belastung zu ziehen möglich ist. Ich theile ferner noch einzelne Werthe für besonders grosse Rückstände mit.

Gr. VIII.	$t = 3^h\,40'$	B = 542	R = 96
	55′	184.	
	4^h 5,′5	183	
	11,′5	182,0	
	$t = 40,'5$	B = 676	R = 280
	56,′5	367,5	
	5^h 4′	365,6	
	10′	364,5.	

Dies ist hart an der Grenze der Dehnbarkeit, das Stäbchen brach für B = 685.

Endlich sei noch erwähnt **Pw.** $22^1/_2{}^6$ No. II, welches die grösste Biegung von Allen zuliess, und das bei einem R = 700 in 14 Stunden nur um 7,5 zurückging.

§ 19.

Der Einfluss von Erschütterungen auf die elastische Nachwirkung.

Die elastische Nachwirkung wird nicht unbedeutend vermehrt, wenn das Stäbchen nach der Entlastung Erschütterungen erleidet. So ging das Stäbchen **W.** IX z. B. als R = 500 war, während eine Stunde Colleg im Beobachtungsraum stattfand, um 6,2 zurück; ferner zeigte sich fast überall bei den Messungen der elastischen Biegungen, wo stets zuerst mit einem grossen Gewicht eine Elasticitätsgrenze erzielt wurde, dass weitere Belastung mit etwas kleinern Gewichten den Rückstand vergrösserte, mit den kleinsten jedoch denselben verkleinerte, indem bei diesen die elastische Nachwirkung, von dem Ruck beim Belasten unterstützt, den durch eben diesen Ruck erzeugten Rückstandszuwachs überwog. Es liegt die Folgerung nahe, dass demnach der grösstmögliche Stoss, den das Stäbchen im Brechen erleidet, eine höchst bedeutende Verringerung des Rückstandes hervorrufen muss. Dies habe ich auch durch die Beobachtung nachgewiesen. Ich fasste nämlich die beiden Hälften mit den aufliegenden und also nicht gekrümmten Enden zusammen in eine Klemme (s. Figur 13) und beobachtete die Distanz der beiden innern Kanten *xx*. Diese ist streng

$$= R\sqrt{1 - 12\left(\frac{R}{L}\right)^2}$$

oder da bei diesen Beobachtungen überall $\left(\frac{R}{L}\right)^2$ vernachlässigt werden kann = R, gleich dem Rückstand selbst.

Die Messungen, die um etwa sechs Trommeltheile zweifelhaft waren (welche Verschiedenheit durch verschiedenes Fassen der Enden des Stäbchens hervorgebracht wurde), ergaben unter Anderem:

W. No. VIII zeigt für B = 373 R = 297
und brach etwa für B = 375.
Nach dem Brechen fand sich R = 174
O. No. II. (aus S. 1) letzte Belastung:
B = 658 R = 309
Es brach für B = 695
und zeigte dann R = 223.

Selbstverständlich war dafür gesorgt, dass die Hälften des Stäbchens beim Brechen sofort aufgefangen wurden, sodass nicht die Erschütterung des Fallens auf das Phänomen einwirken konnte.

Es liegt noch die Frage nahe, ob nicht im Moment der Entlastung eine äusserst schnell verlaufende elast. Nachwirkung stattfindet, die zur Zeit der gewöhnlichen Beobachtung schon so unmerklich geworden ist, wie die obigen Beobachtungen zeigen. Dem scheint aber nicht so zu sein. Ich habe mehrfach Belastungen wiederholt, während das Mikroscop auf den Nullpunkt eingestellt blieb und also über dem Einstellen gar keine Zeit verloren ging. Allerdings habe ich dann manchmal eine Vergrösserung des Rückstandes bemerkt, dieselbe blieb aber immer ganz oder fast ganz bestehen, und war deshalb als ein Rückstandszuwachs, der durch den Stoss des Belastens und Entlastens entstanden war, anzusehen. Freilich bleibt immer noch die Möglichkeit, dass während der kurzen Zeit des Entlastens die elastische Nachwirkung in stärkerer Weise thätig ist; dies dürfte sich wohl aber der Beobachtung völlig entziehen.

Die hierdurch nachgewiesene Kleinheit der elastischen Nachwirkung macht das Steinsalz besonders geeignet, die Verhältnisse des Rückstandes zu studiren, dessen Betrachtung der folgende Theil gewidmet ist.

II. THEIL.

Die Untersuchung der bleibenden Durchbiegung oder des Rückstandes.

I. Abschnitt.

Die Beobachtungsmethoden.

Vorläufige Beobachtungen, die mit der Messung der elastischen Biegungen einer Anzahl von Stäbchen verbunden wurden, zeigten im Rohen, dass der Rückstand mit der Belastung zu Anfang sehr langsam, dann immer schneller wachse, zugleich aber, dass die damals angewandte Belastungsart völlig untauglich sei, das Gesetz des Rückstandes zu untersuchen. Es erscheint darum gut, der Besprechung der Beobachtungsmethoden eine Uebersicht der vermeidlichen und unvermeidlichen Störungen voranzuschicken, die die getroffenen Anordnungen rechtfertigen und zugleich die Fehler erklären soll, die hier viel grösser sind, als bei den Messungen der elastischen Biegungen. Zuvörderst will ich aber die Bezeichnungen erwähnen, die im Folgenden consequent beibehalten sind:

Die vollständige Biegung (also die gesammte Abweichung von der natürlichen Gestalt) $= D$;

die elastische (nach der Entlastung verschwindende) $= B$;

die dauernde, d. i. der Rückstand, $= R$, so dass also

$D = B + R$ ist.

Die Belastung des Stäbchens $= p$.

§ 1.

Uebersicht der die Grösse des Rückstandes beeinflussenden Umstände.

Von ausserordentlichem Einflusse auf den Rückstand sind alle Erschütterungen, die beim Beginn und während der Belastung erfolgen. Das auffallendste Beispiel hierfür bot W. No. V., während es mit Sa + 3 Gr. belastet war. Ein Stoss mit dem Fuss an den Tisch verursachte nämlich einen Rückstandszuwachs von 200 Trommeltheilen, während sonst etwa 30 zu erwarten gestanden hätten. Zufälliges Setzen eines Fusses auf dieselbe Diele, auf welcher der Tisch stand, brachte oft augenblickliche Zuwachse von 2 Trommeltheilen hervor.*) Es folgt hieraus, dass bei der Beobachtung zu allermeist Sorgfalt darauf verwandt werden musste, die Belastung ohne Stoss hervorzubringen; das ist auch durch die weiter unten beschriebenen Einrichtungen völlig erreicht. Nur beim Aufsetzen der Schneide auf das Stäbchen und dem vorhergegangenen Auflegen desselben auf seine Lager ist eine Erschütterung trotz der angewandten möglichsten Vorsicht nicht völlig zu vermeiden gewesen. Davon geben die Beobachtungstafeln Zeugniss: Die Anfangsbiegung R_a des Stäbchens ist meist direct beim Umlegen bestimmt; die darauf folgende Belastung erzeugt einen Rückstand R, und beim Wiederumlegen müsste sich nun die Anfangsbiegung $= (R_a + R)$ finden, aber es ergeben sich häufig wesentliche Abweichungen, die in der Hauptsache sicher die oben erwähnten Ursachen haben.**) Diese Fehler influiren hauptsächlich auf die ersten Beobachtungen, während R noch klein ist. Hinzu tritt noch der Umstand, dass die Stäbchen, welche immer mit einer äusserst dünnen nicht zu entfernenden Petroleumschicht überzogen sind, bei grösserer Belastung sich fester auf die

*) Der Einfluss der Erschütterung zeigte sich, wie zu erwarten, bei den stärksten Belastungen am grössten.

**) Nebenbei wirken störend zufällige Unebenheiten der Oberfläche des Stäbchens.

Lager aufdrücken, als bei geringer. Diesen Fehler habe ich öfter für sich untersucht; er übersteigt nicht 2 bis 3 Trommeltheile, ist aber immerhin gross genug, die Anfangswerthe von R, die selbst klein sind, sehr unsicher zu machen. Da das Wachsen des Rückstandes mit dem Gewicht vom Anfangszustand des Stäbchens abhängig ist, so ist der Einfluss der Unsicherheit in seiner Bestimmung auch von Belang. Endlich ist aber der Rückstand eine Function der Zeit und zwar ändert er sich bei starken Belastungen ausserordentlich schnell (30 und mehr Trommeltheile in der Minute). Da nun die Einstellung der Mikrometerschraube nicht momentan geschieht, so ist klar, dass die Werthe der sehr grossen Rückstände, die aus einer Reihe von Beobachtungen nach verschiedener Dauer der Belastung berechnet wurden, bedeutenden Fehlern ausgesetzt sind.

Zu diesen Uebelständen, die am Stäbchen selbst haften, kommt noch der letzte, dass eine nur einmalige Einstellung des Fadenkreuzes dem dabei möglichen Beobachtungsfehler vollen Einfluss gestattet, und dass die Beobachtung nur an einer Stelle der Schraube, trotz der oben angeführten Correction für deren Fehler, einen Einfluss derselben wohl zulässt.

§ 2.

Beschreibung der Hülfsapparate der Beobachtung und ihrer Verwendung.

Das Hauptaugenmerk bei der Wahl der Hülfsmittel zum Belasten der Stäbchen musste darauf gerichtet sein, dasselbe ohne Erschütterung geschehen zu lassen.

3 Instrumente sind es, die ich dazu je nach Bedürfniss verwandte.

1. Der in den Tabellen sogenannte

Zuflussapparat. (Fig. 14.)

Am Stäbchen hängt ein sehr leichtes Glasgefäss, in das hinab ein Capillarrohr führt, welches durch einen Gummischlauch mit dem Wasserreservoir verbunden ist, das sich beliebig heben und senken lässt, um den Zufluss zu beschleunigen oder zu verzögern und selbst einen Abfluss zu bewirken. Ist die bezweckte Biegung erreicht, so wird der Gummischlauch durch einen Quetschhahn verschlossen, der so eingerichtet ist, dass er mit einer Hand leicht und momentan in Thätigkeit gesetzt werden kann. Um die Belastung von nahe 0 anfangen zu lassen, ist das Wassergefäss, das am Stäbchen hängt, compensirt durch ein ganz gleiches zum kleinsten Theil gefülltes Gefäss. Hierdurch wurde der Einfluss der Verdunstung (wie die Prüfung zeigte) eliminirt, der ausserdem den Vorgang bedeutend modificirte. Die Entlastung geschah durch Arretur des Waagebalkens, bei starken Biegungen wurde jedoch zuvor Flüssigkeit abgelassen, um dem Stoss den Einfluss zu nehmen. Wenn ich das Brechen in nächster Zeit erwartete, folgte ich mit dem Fadenkreuz des Mikroscopes dem des Stäbchens und beobachtete so ziemlich sicher die vollständige Durchbiegung ($\bar{D}$), bei der das Stäbchen brach. Die Belastung in dem betreffenden Moment ($\bar{p}$) liess ausserdem $\bar{B}$ berechnen. Beobachtet wurde im allgemeinen der Augenblick des Beginnens der Belastung, von dem aus die Zeit gerechnet wurde und darnach zu mehreren folgenden Zeitpunkten t und D zugleich.

Dieser Apparat hat den kleinen Uebelstand, dass man nicht in jedem Moment die Grösse der Belastung kennt, und dass ferner das mehrfache Einstellen der Mikrometerschraube schwer zu vermeidende Erschütterungen des ganzen Apparates hervorbringt (die indess die Uebung verringern lehrte). Dies beides wird vermieden durch den folgenden

2. Apparat, der in den Tabellen als

Einsenkungsapparat

aufgeführt ist. Vielfache Versuche und Veränderungen brachten ihn am Ende auf die folgende Form, die Figur 15 darstellt:

In das am Stäbchen hängende Gefäss, welches zur Vermeidung des Einflusses der Capillarität mit Kalilauge zu $^2/_3$ gefüllt, und wie oben, und zwar vollständig compensirt ist,*) wird ein versilbertes Gewicht P (siehe die Fig. 15), das eine Theilung trägt, eingesenkt und dadurch ein Belastungszuwachs = dem verdrängten Gewicht Flüssigkeit erzeugt. Die Stellung des Gewichts P wurde an seiner Theilung mittelst eines Mikroscopes und einer Marke am Gefäss abgelesen. Der Werth der Theilung wurde dadurch bestimmt, dass vor der Messung die Gewichte bestimmt wurden, die auf der Schaale σ nöthig waren, um das Gefäss, nach Einsenkung des Gewichtes bis zu einem bestimmten Theilstrich, zu compensiren. Die Sicherheit war = 0,01 Gr. Das Einsenken geschah mittelst einer kleinen, nach der Figur 16 selbstverständlichen Vorrichtung, an einem Silberdräthchen. Diese auch sonst noch benutzte Vorrichtung verstehe ich unter dem Namen des „Einsenkungsapparates".

Seine Hauptverwendung ist folgende. Nachdem das Fadenkreuz des Mikrometers auf die Stelle geführt ist, bis zu der ich durchzubiegen gedenke, wird durch Einsenken belastet, — was sehr ruhig geschieht, weil Kalilauge das Silber, wenn es zuvor damit gewaschen ist, sehr gut benetzt. Nachdem der Faden des Stäbchens den des Mikrometers erreicht hat, wird die Stellung des Gewichts abgelesen. Nun würde, wenn Alles sich selbst überlassen bliebe, die vollständige Biegung mit der Zeit wachsen.

*) Beide Gefässe sind gleich gross, nicht $\sigma < s$; dies zeigt eine Betrachtung der Wirkung der Verdunstung als nothwendig.

Es wird dann das eingesenkte Gewicht langsam wieder in die Höhe gezogen, dabei fortwährend mittelst des auf das Stäbchen gerichtete Mikroscop controlirt, dass die vollständige Durchbiegung D constant bleibt, und die Stellung des Gewichts zu verschiedenen Zeitpunkten abgelesen. (Auf diese Weise wird während der Belastung die Mikrometerschraube nie berührt.) Es ist klar und soll bei der Betrachtung von R als Function der Zeit auch nachgewiesen werden, dass so, beim fortwährenden Vermindern der Belastung, R sich schneller einem definitiven Werth bis auf Grössen, kleiner als die Beobachtungsfehler nähert, als bei der vorigen Methode.

Nachdem sich durch die Anwendung der beiden besprochenen Methoden gezeigt hatte, bis zu welchen Biegungen hin nach einer gewissen Belastungsdauer der weitere Zuwachs von R mit der Zeit unerheblich sei, konnte der Bequemlichkeit halber von der Zeit ganz abgesehen werden, und für solche geringe Biegungen der

3. Apparat, der in den Tabellen nur als die

Schraube

characterisirt ist, angewandt werden. Bei demselben wurde die Schneide bis zu einem beabsichtigten Punkte bald mittelst einer Schraube niedergepresst, bald die mit starkem Gewicht beschwerte so weit herabgelassen, und darauf das Stäbchen die in den Tabellen angegebene Zeit t hindurch in der dadurch erzeugten Biegung erhalten.

Diese Beobachtungsmethoden geben von selbst an die Hand, dass es practisch ist, für die weitere Untersuchung den Rückstand R nicht als Function der Belastung p, sondern der elastischen Biegung B, die demselben proportional ist, anzusehen, denn diese wird in allen 3 Methoden direct neben dem Rückstand beobachtet.

Dieser Wechsel hat aber auch noch die folgenden Vortheile:

Es steht wohl fest, dass R seinen Ursprung der durch die elastische Biegung im Stäbchen erzeugten Spannung verdankt. Ist nun l die Länge einer Schicht des Stäbchens in der Entfernung x von der neutralen Schicht zwischen 2 unendlich nahen Querschnitten an der Belastungsstelle und δl seine Verlängerung, so ist

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{12 x B}{L^2}$$

und die Spannung eine Function davon. Indem ich nun B als Argument einführe, befreie ich mich vom Einfluss von E, dem Elasticitätsmodul und von B, der Breite des Stäbchens.

Um auch noch die Dicke und Länge, soweit sie in der Spannung darin steckt, fortzuschaffen, wähle ich als Argument später beim Aufstellen der mathematischen Form für R, genauer gesagt $\frac{B}{\overline{B}}$, d. i. die elastische Biegung für die Belastung p dividirt durch die elastische Biegung, bei der der Bruch erfolgt, und dies ist direct

$$= \frac{\sigma}{\overline{\sigma}}$$

d. i. = dem Verhältniss der den beiden Belastungen entsprechenden elastischen Spannungen in einer beliebigen Schicht. Dabei ist für die Oberflächenschicht angewandt $\overline{\sigma}$, eine der Gattung der Stäbchen individuelle Constante.

II. Abschnitt.

Betrachtung des Rückstandes als Function der Dauer der Belastung.

§ 3.

Mathematische Darstellung des Vorganges.

Ich lege der Betrachtung die folgende Annahme zu Grunde:

Wenn das Stäbchen zur Zeit $t = o$ momentan mit einem Gewicht p belastet ist, so tritt momentan nur die elastische Biegung ein, der Rückstand ist zur Zeit $t = o$ selbst $= o$, und wächst nun nach einem Gesetz, das eine Function ist von t mit dem Parameter B; also: $R = F(t,B)$.

Aus dieser Vorstellung der Biegung in der einfachsten Form habe ich Folgendes für die Darstellung des Vorgangs in Wirklichkeit abgeleitet.

Hier ist der Vorgang sehr complicirt. Die Belastung erfolgt von $t = o$ und $p = o$ allmählig bis zu einem Zeitpunkt t_1, dem die elastische Biegung B_1 entspricht; dann wird das Stäbchen bei constantem $B = B_1$ sich selbst überlassen bis t_2; jede Belastung besteht also aus 2 Perioden, in der ersten ist B nach einem unbekannten Gesetz variabel, in der zweiten constant. Nach einer kurzen Arretur, die nur von der Zeit abzurechnen ist, da ich die elastische Nachwirkung vernachlässigen kann, wird die Biegung von B_1 aus wieder vermehrt u. s. f. Kurz während der $\varkappa$ten (vollendeten) Belastung wird wegen der zwei verschiedenartigen Zeitperioden einer jeden Belastung der Rückstand ausgedrückt sein durch:

$$R_t = \sum_0^{x-1_h} \left\{ \int_{t_{2h}}^{t_{2h+1}} \left[F't + F'B.\frac{dB}{dt} \right] dt + \int_{t_{2h+1}}^{t_{2h+2}} \underset{(B=B_{h+1})}{F't\,dt} \right\}$$

$$+ \int_{t_{2x}}^{t^{2x+1}} \left[F't + F'B.\frac{dB}{dt} \right] dt + \int_{t_{2x+1}}^{t} \underset{(B=B_x)}{Ft\,dt}$$

Es zeigt sich aber sogleich, dass, ganz unabhängig von der Art, wie B während des Belastens von t abhängt, der ganze Ausdruck zusammenfällt in

$$= Ft,$$
$$(B = B_x)$$

denn B erreicht alle Mal für die obere Grenze der Integrale, in denen es variabel ist, den Werth, den es im folgenden constant behält. Darin ist aber $t =$ der Summe aller in der Versuchsreihe von $p = o$ dagewesenen Belastungsdauern.

§ 4.

Behandlung der empirischen Formel

$$R_t = R_\infty (1 - e^{-qt})$$

Die Beobachtungen haben nun ergeben, dass innerhalb der Grenzen der Genauigkeit, die die vielen Fehlerquellen mich annehmen liessen, gesetzt werden kann

$$R_t = R_\infty (1 - e^{-qt}).$$

Dies q in seiner Abhängigkeit von B zu bestimmen, wollte Anfangs nicht gelingen; da es aber weder consequent mit B wachsend noch abnehmend sich ergab, wollte ich fast schliessen, dass es für dasselbe Stäbchen constant sei. Es gelang mir später, diese nur vermuthete Thatsache ganz allgemein zu beweisen. Da nämlich der Differentialquotient von R nach B lautet:

$$\frac{dR}{dB} = \frac{dR_\infty}{dB}(1 - e^{-qt}) + R_\infty \frac{dqt}{dB} e^{-qt}$$

so würde er für jedes B, für unendliches t selbst $= \infty$ sein, also die Curve an jeder Stelle vertical stehen. Da dies aber unmöglich ist, so muss

$$\frac{dqt}{dB} = 0 \text{ sein also*)}$$

$$q = Const.\,(B) \text{ q. e. d.}$$

In sich stimmen die Curven im Allgemeinen gut mit dem obigen Gesetz überein, es giebt kaum Fehler über 1 bis 2 Trommeltheile.

Ueber die Berechnung dieser transscendenten Gleichung, in der R_∞ und q unbekannt und der Anfangspunkt von t unsicher ist, will ich ein Wort sagen, weil ich die von mir angewandte Methode für nicht unpraktisch halte: Ich rechne beim Beobachten t von t_0, dem Anfang der letzten Belastung an, und setze also in die Gleichung dafür $t + t_0$ und

$$e^{-q(t_0+t)} \text{ kurz} = me^{-qt}$$

so ist aus einer Reihe von Beobachtungen, die graphisch dargestellt worden ist, leicht eine Reihe von Werthen für R_t so zusammenzustellen, dass t um gleiche Incremente fortschreitet, so dass also

$$R_1 = R_\infty (1 - me^{-q\alpha})$$
$$R_2 = R_\infty (1 - me^{-2q\alpha})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R_n = R_\infty (1 - me^{-nq\alpha}).$$

Dann ist $R_2 - R_1 = R_\infty . m(e^{-q\alpha} - e^{-q2\alpha})$

$$R_3 - R_2 = R_\infty . m(e^{-q2\alpha} - e^{-q3\alpha})$$

Daraus und unter Benutzung aller Messungen:

$$e^{+q\alpha} = \frac{1}{n-2} \sum_2^{n-1_h} \frac{R_h - R_{h-1}}{R_{h+1} - R_h}$$

so ist also $q\alpha$ sehr leicht bestimmbar. Ferner ist,

$$R_n - R_1 = R_\infty . m(e^{-q\alpha} - e^{-nq\alpha})$$

$$\sum_1^{n_h} R_h = R_\infty \left(n - m \sum_1^{n_h} e^{-hq\alpha}\right) \text{ daraus}$$

$$R_\infty = \frac{\sum_2^{n_h} R_h}{n} + \frac{(R_n - R_1) \sum_1^{n_h} e^{-hq\alpha}}{n(e^{-q\alpha} - e^{-nq\alpha})}$$

und also m eliminirt. Für die Rechnung ist bequemer zu benutzen

$$R_\infty - R_1 = \frac{\sum_1^{n_h} (R_h - R_1)}{n} + \frac{(R_n - R_1) \sum_1^{n_h} e^{-hq\alpha}}{n(e^{-q\alpha} - e^{-nq\alpha})}$$

Nebenbei folgt zu einer Art Controle

$$m = e^{-qt_0} = \frac{n(R_n - R_1)}{(e^{-q\alpha} - e^{-nq\alpha}) \sum_1^{n_h} R_h + (R_n - R_1) \sum_1^{n_h} e^{-qh\alpha}}$$

Ueber die Genauigkeit, mit der die, verschiedene Male mit verschiedenen Incrementen α wiederholten, Rechnungen stimmen, kann ich sagen, dass sie, selbst wenn $R_\infty - R_1$ 100 Trommeltheile erreichte, nicht um mehr als deren 3—5 von einander abweichende Resultate ergaben. Verhältnissmässig ungenauer war die Berechnung bei kleinem $R_\infty - R_0$.

Eine grosse Zahl der im Folgenden zusammengestellten Beobachtungsreihen sind aber nicht in der erörterten Weise angestellt und berechnet worden, sondern es ist bei ihrer Anstellung die Belastung (resp. bei An-

*) Ich benutze *Const.* und später auch R als Functionszeichen, indem ich das Argument in Klammer beifüge.

wendung der Schraube die vollständige Durchbiegung D) constant eine bestimmte Zeit erhalten und am Ende nur eine Messung angestellt worden. Für diese Beobachtungsart gilt gemäss der empirischen Formel

$$R_t = R_\infty (1 - e^{-qt})$$

Folgendes.

Zunächst ist zu bemerken, dass es keine Belastungsdauer giebt, für die die Ordinaten der Curve $R_t(B)$ denen der Curve $R_\infty(B)$ proportional wäre, denn t wächst von Beobachtung zu Beobachtung. Dagegen ist, wenn die Dauer jeder Belastung constant $= \tau$ ist, und also die nta Beobachtung giebt:

$$R_\tau^{(n)} = R_\infty^{(n)} (1 - e^{-nq\tau})$$

$$\frac{\left(\frac{R_\tau}{R_\infty}\right)_{n+1} - \left(\frac{R_\tau}{R_\infty}\right)_n}{\left(\frac{R_\tau}{R_\infty}\right)_n - \left(\frac{R_\tau}{R_\infty}\right)_{n-1}} = e^{-q\tau}$$

Dies ist die an die Stelle der Proportionalität tretende Gleichung. Es ist also aus je 2 der Grössen $R_\tau^{(n)}$, $R_\infty^{(n)}$, nq die 3., — oder aus der Curve für $R_\tau(B)$ und q die Curve für $R_\infty(B)$ zu bestimmen.

Es ist noch der oben angekündigte Beweis zu führen, warum sich R schneller seinem endlichen Werth R_∞ nähert, wenn D constant erhalten wird, als wenn B, — also wenn die zweite oder dritte statt der ersten Beobachtungsmethode angenommen wird.

Ist $B = Const.(t)$, so ist

$$\left(\frac{dR}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t}\right)_{B = Const.};$$

ist hingegen B mit der Zeit variabel, so ist

$$\left(\frac{dR}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial B} \cdot \frac{dB}{dt}\right)_{B = f(t)}$$

Da aber bei der besprochenen Beobachtungsmethode $B + R = D = Const.(t)$ ist, so folgt $\frac{dB}{dt} = -\frac{dR}{dt}$ und also

$$\left(\frac{dR}{dt} = \frac{\frac{\partial R}{\partial t}}{1 + \frac{\partial R}{\partial B}}\right)_{B = f(t)}.$$

Es ist aber $\frac{\partial R}{\partial B}$ die Tangente des Winkels, den die Curve $R = F(B)$ an der betreffenden Stelle B mit der X- (d. i. B-) Achse macht, und diese ist stets > 0, da die Curve die in Figur 18 angegebene Form hat.

Also ist der endliche Werth R_∞ hier kleiner, und auch die Abweichung des zur Zeit t beobachteten von ihm kleiner, als wenn B constant bleibt.

III. Abschnitt.

Erläuterung der graphischen Darstellung der Beobachtungen in den Curventafeln.

§ 5.

Allgemeines.

Den grössten Theil meiner Beobachtungen des Rückstandes habe ich in den beigegebenen 5 Curventafeln graphisch dargestellt; ausgeschlossen ist wissentlich keine, die eine von den andern nicht gezeigte Eigenschaft an sich getragen hätte, sondern nur jede, bei deren Gewinnung die Beobachtungsmethoden noch nicht den wünschenswerthen Grad von Genauigkeit hatten. (Den Einfluss der noch unvollkommenen Beobachtungsmethode zeigt unter dem Gebotenen W. VIII. durch die sehr bedeutenden Unregelmässigkeiten; sie sind einzig dadurch verursacht, dass bei diesen Messungen nur ein Fadensystem an der Schneide existirte, und nicht 2 parallele wie bei fast allen übrigen, sodass zu jeder Ablesung die Schraube um 3 bis 4 ganze Umdrehungen gedreht werden musste.)

Ich habe die Methode der graphischen Darstellung der Resultate der bessern Uebersichtlichkeit wegen angewandt, die Beifügung von Zahlentabellen aber unterlassen, weil ich, indem ich die Curven selbst auf den Stein gezeichnet habe, ziemlich dieselbe Sicherheit erreicht habe, wie durch die directe Mittheilung der beobachteten Zahlenwerthe. Denn bis auf ganze Trommeltheile genau ($= \frac{1}{800}$ Millimeter) habe ich aufgezeichnet, und die Zehntel, die ich zwar bei der Beobachtung abgelesen habe, sind wegen der sehr vielen Fehlerquellen werthlos. Ueber den Massstab, in dem die Zeichnungen angefertigt sind, werde ich später das Nöthige sagen, denn die 2 Arten der dargestellten Curven,

1. der Rückstand als Function der elastischen Biegung,
2. der Rückstand als Function der Dauer der Belastung

müssen dabei unterschieden werden. Für beide Gattungen gilt zunächst Folgendes:

Jede der 5 Tafeln ist einer Gattung von Stäbchen gewidmet, nämlich 1. W.; 2. Pw. $11\frac{1}{4}^0$ und $22\frac{1}{2}^0$; 3. Pw. $33\frac{3}{4}^0$; 4. Gr.; 5. O.

Die starkgezeichneten geraden Linien fassen im Allgemeinen zusammengehörige Curven, die demselben Stäbchen entsprechen, ein. Nur auf der Tafel für O. gestattete dies der Raum nicht und sind darum die zwei

verschiedenen Stäbchen entsprechenden Curven auf dasselbe Coordinatensystem bezogen. Die Bezeichnung ist die schon in den Beobachtungstafeln der elastischen Biegung angewandte, durch die an einem Ende in das Stäbchen eingeritzte Zahl. Bei einigen wenigen sind die Hälften des vorher zerbrochenen noch einmal beobachtet worden; diese sind dann durch einen Index$_1$ oder$_0$ charakterisirt, je nachdem die Hälfte die Marke trug oder nicht. Beigeschrieben ist jedesmal der Bezeichnung die Dicke (D), Länge (L) in Millimetern, die Dauer der Belastung τ und die Art der Biegung (je nachdem der eine oder andere der oben erörterten Apparate in Anwendung gekommen war.*)

Die Curven für R als Function von B sind die grosse Mehrzahl; bei ihnen ist R u. B nicht an die Coordinatenaxen angeschrieben. Alle, die bis zum Brechen des Stäbchens geführt worden, sind in demselben Maassstabe gezeichnet, der bei jeder auf den Coordinatenaxen durch Zahlen angedeutet ist; es entspricht ein Theilstrich 10 Trommeltheilen $\left(= \frac{10^{\text{mm.}}}{800}\right)$ Bei einigen, die sich allein auf den ersten Theil des Verlaufes bezogen, ist behufs grösserer Klarheit, wie die beigeschriebenen Zahlen zeigen, der doppelte Maassstab in Anwendung gebracht.

Es ist nicht die Belastung als Abscisse dieser Curven gewählt, weil ich die Vergleichung gleichartiger Grössen der ungleichartiger vorzog. Für die Anschauung macht das keinen Unterschied, da p mit B proportional ist.

Dem Zustande ohne Belastung entsprechen die Punkte der Ordinatenaxe. Hatte das Stäbchen beim Auflegen auf die Schneiden bereits eine dauernde Biegung, so beginnt die einer folgenden Belastungsreihe entsprechende Curve des Rückstandes an einem Punkte über oder unter der Abscissenaxe, je nachdem der Anfangsrückstand die Richtung der folgenden Belastungen (das Stäbchen also diese Gestalt: ⌣) hatte, oder die entgegengesetzte. Hiernach unterscheide ich positive und negative Rückstände. Der Rückstand wächst in der Richtung der Belastung und nimmt ab in der entgegengesetzten. (Hiernach ist ein negativer Rückstand kleiner als ein positiver, selbst wenn er absolut grösser wäre. Dies behufs bequemeren Ausdrucks!) Hatte das Stäbchen keinen Anfangsrückstand, so beginnt die Curve im Coordinatenanfang.

Wo für ein Stäbchen eine Reihe von Curven aufgeführt ist, ist ihre Reihenfolge durch Zahlen (I, II, . . .) angedeutet; durch die Beifügung der I ist jedoch nicht gesagt, dass die dargestellte Biegung die überhaupt Erste sei, der das Stäbchen unterzogen ist. Dies ist vielmehr stets durch ein beigefügtes: „I. Biegung“ besonders hervorgehoben.

Waren die für eine bestimmte Lage des Stäbchens (z. B. *ro*) erhaltenen Curven in der erwähnten Weise dargestellt, so hätten die der umgekehrten (d. i. *lu*) entsprechenden eigentlich in den 3. Quadranten des Coordinatensystemes gezeichnet werden sollen; das ist der Raumersparniss und Uebersichtlichkeit halber unterlassen worden: die, 2 entgegengesetzten Lagen entsprechenden Curven sind in denselben (ersten) Quadranten gezeichnet und nur durch beigeschriebenes *ro*, *lu* und drgl. unterschieden, — in verwickelteren Curvencomplexen auch noch durch Punktiren der Einen und Ausziehen der Anderen. Auf diese Weise ist die Vergleichung der, verschiedenen Lagen entsprechenden, Curven erleichtert.

Für den Moment des Brechens konnte stets nur die vollständige Biegung D = B + R ermittelt werden; dadurch gab sich nicht der Endpunkt der Curven völlig genau, sondern nur sein geometrischer Ort, eine unter 135° gegen die B-Axe geneigte Gerade, die in den Curventafeln punktirt zwischen den Endpunkten β und γ dargestellt ist. Die Curve ist bis zu ihr in möglichster Uebereinstimmung mit dem bisherigen Verlaufe fortgesetzt worden.

Bei den Curven für R als Function der Dauer (τ) der Belastung, ist der Maassstab der Zeichnung auf einem frei hineingezeichneten Coordinatensystem aufgetragen. Die erste Abscisse der gezeichneten Curven ist der Zeitpunkt der ersten Ablesung t_0, die erste Ordinate der dabei beobachtete Rückstand R$_0$. Von diesem Punkte ausgehend zeigt die Curve die beobachtete Aenderung des Rückstandes mit der Zeit, nicht die absoluten Werthe von R und t.

Beigeschrieben ist jeder von diesen Curven die elastische Biegung, welche das Stäbchen während der beobachteten Aenderungen des Rückstandes mit der Zeit constant behielt.

§ 6.

Verzeichniss und Spezialbemerkungen zu den Curventafeln.

I. Tafel. Stäbchen normal zur Würfelfläche.

Mit dieser Gattung Stäbchen wurden, weil sie am leichtesten zu ersetzen war, die ersten Rückstandsbeobachtungen angestellt, daher diese Curven zum Theil noch grosse Unregelmässigkeiten zeigen. Sämmtliche Stäbchen, mit Ausnahme von W. II, sind bis zum Brechen beobachtet worden. Sie alle zeigen, dass die Curve für R als Function von B im Punkt des Brechens senkrecht steht.

Ausserdem Folgendes: **W. II.** Das Stäbchen ist

*) Ich bemerke, dass durch ein Versehen in den Curventafeln die Bezeichnung R und B statt R und B angewandt sind. Da die Breite B in denselben nie angeführt wird, so ist eine Verwechselung nicht zu fürchten.

mit Absicht mehrfach von demselben Anfangszustand aus untersucht worden. Die Curven für gleiche Anfangszustände zeigen sich fast gleich. Man bemerke, wie die Curven *lu* und *ro* sich fast parallel sind, obgleich sie verschiedenen Anfangsrückständen entsprechen. Ferner, dass Curve V, nachdem sie das Ende von I erreicht hat, scheinbar in die Fortsetzung von I umspringt.

W. VI ist das dünnste,

W. X das dickste Stäbchen dieser Gattung bei gleicher Länge. Die dem letzteren entsprechende Curve gehört einer 1. Biegung an.

W. VII zeigt, wie allgemein die Curven um so schneller ansteigen, je tiefer sie beginnen. Dies System ist wegen grossen Unsicherheiten nicht von Wichtigkeit, aber aufgeführt, weil es das einzige ist, das einen später aufzustellenden Satz nicht bestätigt.

W. VIII. Trotz sehr verschiedener Anfangsrückstände sind die Curven *ro* und *lu* fast parallel, wie in **W. II.** (Die Anfangspunkte sind sehr unsicher.) Die Curve III springt, als sie die grösste Abscisse von I, welche von einem kleineren Anfangsrückstand ausgeht, überschritten hat, merklich in die Fortsetzung der Curve I über.

II. Tafel. Stäbchen normal zu Pyramidenwürfelflächen.

Pw. $11^1/_4{}^0$ **I.** Hier ist nicht zu entscheiden, ob beim Passiren der grössten Abscisse von Curve I die III. eine Unstetigkeit zeigt, da an dieser Stelle offenbar an sich die stärkste Krümmung stattfindet.

Pw. $22^1/_2{}^0$ **II.** Dieses Curvensystem ist wohl das wichtigste von allen. Es ist erhalten, indem das schon früher benutzte vortreffliche Stäbchen (vortrefflich wegen der grossen Länge bei sehr geringer Dicke) mit einer zufälligen Anfangsbiegung von + 18 Trommeltheilen zunächst um etwa 690 dergl. (im Ganzen) gebogen wurde. Dadurch erhielt ich die Curve I, die mit einem R = + 150 endigt. Nun wurde das Stäbchen umgelegt, und zeigte also einen Anfangsrückstand nahe = — 150.*) Von diesem aus erhielt ich durch weitere Belastung die Curve II, die mit einem Rückstand = + 13 endet. Das nunmehr erfolgte Umlegen brachte das Stäbchen wieder in die erste Lage, bei einem Anfangsrückstand = — 18 (die Differenz gegen 13 ist erzeugt durch das mit einiger Erschütterung stattfindende Umlegen). Durch wiederholtes Umlegen sind die andern Curven erhalten. Die derselben Lage entsprechenden sind durch die gleiche Strichart dargestellt.

Jedes dieser Curvensysteme für sich zeigt zunächst, dass die Curven um so schneller steigen, je tiefer sie beginnen. (NB. Es ist mit Absicht so eingerichtet worden, dass die Curven

I III V VII von oben herab, die

II IV VI von unten herauf

einander folgen; die Reihenfolge der Biegungen ist also ohne Einfluss auf das ausgesprochene Resultat.) Betrachtet man beide Systeme zusammen, so ist klar, dass sie gemeinsam diesem Gesetz nur genügen, wenn man das Eine längs der Ordinatenaxe so weit verschiebt, dass Curve I mit II zusammenfällt.

Ferner zeigt die Curve VI, nachdem sie die grösste Abscisse der II., welche einen tieferen Ausgangspunkt besitzt, überschritten hat, das Bestreben, in die Fortsetzung von II überzugehen, während VII, wo sie die grösste Abscisse der vorhergegangenen mit höher liegendem Ausgangspunkt passirt, keine Spur einer Unstetigkeit zeigt.

Die Curve VII ist nicht zu Ende geführt, da durch einen unglücklichen Zufall das Stäbchen unbelastet zerbrach.

Pw. $22^1/_2{}^0$ **III.** Zeigt sehr auffallend einen Unterschied der I. Biegung von den übrigen im Character der Curve; ferner das um so steilere Ansteigen, je tiefer der Ausgangspunkt liegt, und in Curve V keine Unstetigkeit beim Ueberschreiten der grössten Abscisse vorhergehender Curven mit höher liegendem Anfang. (Die Curven für R als Fct. von + entsprechen Punkten der Curve V.)

Pw. $22^1/_2{}^0$ **IV** giebt fast dasselbe; und dazu ein Heraustreten der Curve II *lu* aus dem Intervall I u. III *ro*, wie bei Pw. $22^1/_2{}^0$ II.

III. Tafel. Stäbchen normal zu Pyramidenwürfelflächen.

Pw. $33^3/_4{}^0$ **I.** Die 1. Biegung des Stäbchens ergab für ein B, etwa = 100 Trommeltheile, einen negativen Rückstand; dies weist auf eine kleine Unsicherheit des Anfangspunktes. Trotz derselben ist die Verschiedenheit der I. Curve von der III., die nahe denselben Anfangsrückstand hat, erkennbar, wie dergleichen schon mehrfach bemerkt. Beim Passiren der grössten Abscisse der I. Curve (die einen tiefern Anfangspunkt hat) tritt die III. Curve mit einer nicht sehr merklichen Unstetigkeit in die Fortsetzung der Ersten. Ueber die Berechnung der der Formel entsprechenden Punkte werde ich später sprechen. Die Zeitcurve für B = 374 zeigt eine durch eine Erschütterung des Stäbchens verursachte Unstetigkeit und demgemäss die Hauptcurven für R an derselben Stelle (!), wo sie punktirt ist, eine Einbiegung. Die ausgezogene Curve neben der punktirten ist willkürlich.

Pw. $33^3/_4{}^0$ **III.** Zeigt dasselbe anfängliche Verharren der Curve der ersten Biegung an der Abscissenaxe, wie schon öfter erwähnt; und bei der II. Curve (die der andern Lage des Stäbchens entspricht) nicht das Bestreben, in die Nähe des Endes der I. zu kommen,

*) In der Tafel steht fehlerhaft 250 statt 150.

wie das bei Curven, die gleichen Lagen entsprechen, betont wurde.

Pw. 33¾ IV. Ist in Allem eine Wiederholung von Pw. 33¾° I.

Pw. 33¾° V mit **I** verglichen zeigt bei fast gleicher Länge der Stäbchen einen von der verschiedenen Dicke herrührenden sehr andern Character. Die Curve des dünnern Stäbchens steigt allmähliger und weniger hoch.

Die 3 bis zu Ende geführten Curven zeigen mit Uebereinstimmung verticale Tangenten für das B, bei dem das Brechen erfolgte.

IV. Tafel. Stäbchen normal zur Granatoederfläche.

Die gegebenen Curven sind sämmtlich bis zum Brechen des Stäbchens geführt.

Gr. II. Die Curve entspricht keiner ersten Biegung, aber die vorhergegangenen sind nicht auf den Rückstand hin untersucht worden. Da die gegebene Curve einen positiven Anfangsrückstand hat, so ging jedenfalls eine von den vorhergegangenen von einem kleineren aus. Jene reichten etwa bis B = 500 und dort ist in der gegebenen Curve offenbar eine Unstetigkeit vorhanden. Das nicht beobachtete, sondern aus dem beobachteten $\bar{p}$ (beim Brechen) nur vermuthete letzte Stück der Curve ist, wie immer, punktirt angefügt. Der Verlauf vorher zeigt unzweideutig, dass im Moment des Brechens die Curve senkrecht stehen muss.

Die einzigen Curven, die dies nicht so vollständig bestätigen, und die ich eben deshalb aufgenommen habe, sind

Gr. VI. VII. VIII.; aber sie haben wenig Beweiskraft, da Erschütterungen ein vorzeitiges Brechen verursacht haben können, ohne sonst bemerkt worden zu sein.

Gr. VI ist überdies aufgeführt, weil die öfter hervorgehobene Thatsache, dass I. Biegungs-Curven eine Zeit lang der Abscissenaxe parallel bleiben, hier nicht stattfindet. Die auffällige Gestalt des Anfangs der Curve zeigt aber deutlich, dass entweder das Stäbchen nicht ordentlich auf den Lagern gelegen hat, oder die Schneide nicht ordentlich auf ihm. Und da das zweite beobachtete Intervall von B = 25 bis 56 eine ganz horizontale Curve giebt, so spricht im Ganzen genommen die Curve mehr für, als gegen die oft erwähnte Thatsache. (Ist die Fehlerursache von der letzten Art gewesen, so erklärt sich noch leichter das vorzeitige Brechen.)

Gr. VII zeigt das Verharren der Curve an der Abscissenaxe sehr deutlich. Die kleine fast senkrechte Strecke für B = 189 kann entweder in einem Stoss oder in einem Ablesungsfehler ihre Ursache haben, und beides erklärt, warum die Curve am Ende scheinbar nicht vertical steht. $\bar{R}$ ist hier zufällig direct beobachtet, neben dem $\bar{D}$, da das Stäbchen beim Wiederbelasten mit demselben Gewicht, das dies R ergeben hatte, zerbrach.

Gr. VIII ist das dünnste beobachtete Stäbchen und giebt demgemäss die flachste Curve.

Gr. V ist, wie es bei der Anwendung der Schraube in der ersten Gestalt (dass sie die Schneide auf das Stäbchen drückte) leicht kommen konnte, zu Anfang der Biegung nicht gleichmässig von der Schneide berührt gewesen, sondern wahrscheinlich auf der (nicht beobachteten) Rückseite schon gebogen, als die vordere (beobachtete) noch gar nicht berührt worden. So ist hier zu Anfang eine ähnliche Unregelmässigkeit, wie bei VI., die aber, weil das zweite beobachtete Intervall fast horizontal liegt, die oft erwähnte Eigenthümlichkeit erster Biegungen eher bestätigt als in Abrede stellt. Das Erwähnte macht auch selbstverständlich, dass der Abschluss der Curve nicht so sicher die verticale Stellung zeigt als bei andern.

V. Tafel. Stäbchen normal zur Octaederfläche.

Die beiden Curven, die keine ersten Biegungen darstellen, zeigen das Senkrechtstehen der Rückstandscurven an der Grenze der Dehnbarkeit. Ihre Vergleichung zeigt ferner, dass (bei fast gleicher Länge) dem dickeren Stäbchen die steiler ansteigende Curve entspricht. (Druckfehler in den Tafeln: statt 27 mm und 30 mm hat zu stehen 27 und 30 Linien, resp. 60,8 und 67,5 mm.)

Bei den Zeitcurven beachte man die rapide Veränderung des Rückstands mit der Belastungsdauer, zumal bei starken Biegungen.

IV. Abschnitt.

Der Rückstand als Function der elastischen Biegung.

§ 7.

Ableitung characteristischer Eigenschaften des Rückstandes aus den Beobachtungen.

Die Vorgänge des Rückstandes, wie sie in den Curventafeln zur Anschauung gebracht sind, zeigen sich abhängig ausser von der Natur der Stäbchen (das ist Gattung und Gestalt), auch von ihrem Anfangrückstand beim Beginn der Belastung und von der Dauer der Belastung. Die Natur der Stäbchen ist ohne Einfluss auf die characteristischen Eigenschaften der Curven und ändert nur den Zahlenwerth ihrer Constanten, — darüber aber giebt die blosse Betrachtung der Curven wenig Aufschluss. Der Einfluss der Dauer der Belastung ist in der Hauptsache bereits oben besprochen worden; dass auch er das Characteristische der Curven unangetastet lässt, wird sich bald vollständig zeigen. Von

wesentlichem Einfluss ist aber der beim Beginn der Versuchsreihe im Stäbchen vorhandene Rückstand.

Um nun den Ueberblick über die Resultate der Beobachtungen zu erleichtern, sollen zunächst die Eigenschaften aufgeführt werden, die von dem Anfangsrückstand unabhängig sind, — und nach dem Erwähnten selbstverständlich für jede Art von Stäbchen und jede Dauer der Belastung stattfinden.

I. (Fundamental-) Satz.

Nachdem ein bestimmtes Gewicht unendlich lange ein Stäbchen belastet hat, bringt weder ein kleineres, noch das wiederholt aufgelegene gleiche Gewicht einen Rückstandszuwachs hervor. Das ist anders ausgesprochen: *Jede Belastung bringt eine Elasticitätsgrenze gleich der ihr entsprechenden elastischen Biegung hervor, wenn nicht vorher schon eine grössere vorhanden war.*

Dieser Satz ergab sich schon vollständig sicher bei den Messungen der elastischen Biegungen, darum hielt ich es für unnöthig, in den Beobachtungstafeln besondere Beweise niederzulegen.

Denn der Stoss, der bei jenen Beobachtungen durch das Belasten mit Gewichten auf das Stäbchen ausgeübt wurde, brachte den Rückstand immer schon augenblicklich auf einen Punkt, wo er sich mit der Zeit fast oder gar nicht mehr änderte, also sich verhielt, als hätte die Belastung unendlich lange angehalten. Dann brachte aber das Auflegen kleinerer Gewichte, (wenn es ruhig geschah, niemals eine Aenderung des Rückstandes hervor, desgleichen die Wiederholung der Belastung mit demselben Gewichte. Und hierdurch ist der I. Satz bewiesen.

II. Satz. *Bei beginnender Belastung des Stäbchens wächst der Rückstand sehr langsam, — dennoch tangirt die Curve $R = F(B)$ für $B = 0$ nicht, mit einziger Ausnahme des Falles, dass das Stäbchen zum ersten Male gebogen wird.*

Ich definire den Beginn einer Reihe von Belastungen bei einem schon mehrfach gebogenen Stäbchen dadurch, dass die letztvorhergegangene im entgegengesetzten Sinne stattgefunden hat.

Man könnte also physikalisch aussprechen:

Beim Beginn einer Belastungsreihe ist die Elasticitätsgrenze stets $= 0$, mit Ausnahme des Falles, dass das Stäbchen noch nie gebogen ist, in welchem sie aber doch sehr klein ist.

Zum Beweis dieses Satzes sind die 1. Biegungen von

W. X
Pw. 11¼ °, I
Pw. 22½ °, III und **IV**
Pw. ¾ °, I, III und **IV**
Gr. V, VI und **VII**

mit allen übrigen zu vergleichen.

Nach der 2. Fassung des Satzes ist es wahrscheinlich, dass die einer ersten Biegung entsprechende Curve nicht in einem continuirlichen Zuge vom Nullpunkt ausgeht, sondern eine endlich kleine Strecke mit der Abscissenaxe zusammen fällt und sich dann plötzlich aufsteigend von ihr loslöst. Darüber konnte die Beobachtung keinen klaren Aufschluss geben, doch vergleiche man: W. X, Pw. 22½ ° III und IV; Pw. 33¾ IV; Gr. VII, wo sämmtlich die ersten gemessenen Rückstände $= 0$ sind.

III. Satz. *Mit wachsendem* B *nimmt* R *so rasch zu, dass auch seine zweiten Differenzen für gleiche Intervalle von* B *noch wachsen.*

Den Beweis liefern sämmtliche Curven. Bemerkenswerth ist, dass auf einem sehr grossen Stücke vom Anfang aus, die 2 Differenzen fast ganz constant sind, dort also die Curve nahe 2 Grades ist.

Es bot sich nun, als ich W. VIII. mit der Schraube bog, die Frage: Da von gleichen der vollständigen Biegung D ertheilten Zuwachsen immer mehr und mehr als Zuwachs der dauernden Biegung R zurückbleibt — wird jemals der ganze ertheilte Zuwachs dauernd? Die Ueberlegung fand und die Beobachtung bestätigte den

IV. Satz. *Wenn* $\frac{dD}{dB} = \frac{dR}{dB}$ *ist, zerspringt das Stäbchen. Da nun* $D = R + B$, *so folgt, dass zugleich mit* $\frac{dD}{dB} = \frac{dR}{dB}$ *auch* $\frac{dB}{dR} = \frac{dR}{dB} = \infty$ *sein muss.*

Der Beweis dieses Satzes erhellt aus allen bis zu Ende geführten Curven. Es mag erwähnt werden, dass aus der Thatsache, dass die Curve

$$[R = F(B)]_{(t=\infty)}$$

für den Moment des Brechens tangirt, auch ohne Beobachtungen folgt, dass die Curve $R = F(B)$ für beliebiges t dieselbe Eigenschaft hat. Denn nach meiner empirischen Formel ist

$$\frac{dR_t}{dB} = (1 - e^{-qt}) \frac{dR_\infty}{dB}$$

Es bliebe nur die eine Frage, ob nicht $t = 0$ sein könnte, wodurch dann

$$\frac{dR_t}{dB} = o \,.\, \infty \text{ würde.}$$

Das ist aber undenkbar, denn t wird durch alle Beobachtungen derselben Reihe fortgerechnet; um aber eine Curve und eine Richtung für ihre Tangente zu gewinnen, sind doch mindestens zwei auf einander folgende Punkte zu beobachten nöthig; wenn ich aber das Stäbchen in einem Moment belastete und bräche, so hörte die Curve $R = F(B)$ ganz auf zu existiren.

Die Definition der Grösse der Belastung (d. i. der elastischen Biegung), für die das Stäbchen bricht:

$$\frac{dR}{dB} = \frac{dD}{dB} = \infty \text{ oder } \frac{dB}{dD} = o,$$

gestattet eine physikalische Interpretation.

Es tritt das Brechen nämlich ein, sobald die Kräfte, die die Verschiebung der Theilchen im Innern des Stäbchens hindern, keinen Widerstand mehr leisten, und also ein unendlich kleiner Zuwachs der Belastung eine endliche Verschiebung hervorbringt. Oder umgekehrt: es werden dann durch die von aussen verursachte Ortsveränderung gewisser Theilchen (indem D einen Zuwachs erhält) keine elastischen Kräfte mehr erregt, (da $\frac{dB}{dD} = o$ ist) und die verschobenen Theilchen kehren aus ihren Lagen nicht zurück.

Die vollständigen Durchbiegungen (D), die elastischen Biegungen (B), die Rückstände (R) und die Belastungen (p) für den Moment des Brechens werden im Folgenden durch resp. $\bar{D}$, $\bar{B}$, $\bar{R}$, $\bar{p}$ bezeichnet werden.

V. Satz. *Im Augenblick des Brechens ist, trotzdem* $\frac{d\bar{R}}{d\bar{B}} = \infty$ *ist, doch* $\bar{R}$ *endlich.*

Ueber diesen Satz könnten die Curven in Zweifel lassen. Er ist aber zunächst aus physikalischen Gründen unzweifelhaft, denn sonst müsste man jedenfalls bei hinreichender Vorsicht durch beliebig grosse Annäherung der Belastung an $\bar{p}$ einen beliebig grossen Rückstand erzielen können, und das ist bei den endlichen Dimensionen der Stäbchen eine Unmöglichkeit. Wollte man aber behaupten, dass allerdings für endliche Dauer der Belastung $\bar{R}$ endlich, für unendliche aber unendlich sei, so widerspricht dem die empirische Formel

$$\bar{R}_t = \bar{R}_\infty (1 - e^{-qt}).$$

Ausserdem würde daraus folgen

$$\frac{d\bar{R}_t}{dt} = q\bar{R}_\infty e^{-qt} = \infty$$

und das wiederspricht vielfachen Beobachtungen des Verhaltens des Stäbchens im Augenblick des Brechens.

Endlich und am schlagendsten spricht für den V. Satz die Thatsache, dass es gelungen ist, durch eine bestimmte Methode $\bar{R}_\infty$ schon für einen endlichen Zeitpunkt zu beobachten. Dazu spreche ich den folgenden Satz als eine Ergänzung des V. aus:

Geschicht die Biegung mittelst der Schraube, so fällt die Curve des Rückstandes für endliche beliebige τ *in 2 Punkten, nämlich* $B = o$ *und* $B = \bar{B}$ *mit der für unendliches* τ *zusammen.*

Die Biegung mittelst der Schraube war dadurch characterisirt, dass bei derselben D (nicht B) eine beliebige Zeit constant erhalten wurde. Für diese Zeit war in § 4. gefunden

$$\frac{dR_t}{dt} = \frac{\frac{\partial R_t}{\partial t}}{1 + \frac{\partial R_t}{\partial B}} = \frac{qR_\infty e^{-qt}}{1 + (1 - e^{-qt})\frac{dR_\infty}{dB}}$$

Dies integrirt giebt

$$R_\infty - R_t = \frac{R_\infty}{\frac{dR_\infty}{dB}} . l\left(\frac{1 + \frac{dR_\infty}{dB}}{1 + (1 - e^{-qt}\frac{dR_\infty}{dB}}\right)$$

und hieraus folgt in der That für

$B = o \quad R_\infty - R_t = R_\infty . \frac{l(1)}{o} = R_\infty = o$ und für

$B = \bar{B} \quad R_\infty - R_t = R_\infty \frac{\infty}{\infty} = o$, also in beiden Fällen für jedes $t \mid R_t = R_\infty$.

Da dies Resultat für $B = \bar{B}$ etwas überraschendes hat, so gebe ich noch einen Beweis.

Beim Belasten mit der Schraube ist D eine willkürliche Function der Zeit $= f(t)$. Es folgt dann aus

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial B} \cdot \frac{dB}{dt} \text{ und}$$

$$f't = \frac{dR}{dt} + \frac{dB}{dt}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial B} \cdot f'(t)}{1 + \frac{\partial R}{\partial B}} \text{ und dies ist}$$

für $B = \bar{B} \quad \frac{d\bar{R}}{dt} = f't.$ Das erklärt aber, warum $\frac{d\bar{R}}{dt}$ für constantes $D = o$ ist und zeigt, dass, wenn $\bar{B}$ erreicht ist, schon für endliches t das Stäbchen den Rückstand $\bar{R}_\infty$ besitzt. Denn die Gleichung sagt: Es findet keine Aenderung von R mit der Zeit mehr statt, es sei denn, dass D geändert werde, — oder physikalisch gesprochen, — die erzeugte Spannung hat bereits alle möglichen Verschiebungen im Innern hervorgebracht — und das ist die Definition von R_∞.

Hieraus folgte eine Regel für die Construction der Curven in den Tafeln. Das im Moment des Brechens beobachtete $\bar{D}$ giebt für sich allein nicht den Endpunkt der zu construirenden Curve an, sondern nur seinen geometrischen Ort, eine unter 135° gegen die B Axe geneigte Gerade $\beta\gamma$. Gemäss unserm Satz ist nun die Curve bis zu dieser Geraden so fortgesetzt worden, dass sie dort vertical steht; dadurch ist $\bar{R}$ mit grosser Annäherung gefunden.

VI. Satz. $\bar{R}$ *ist für dasselbe Stäbchen nicht constant.*

$\bar{B}$ ist bekanntlich, wie Untersuchungen des Herrn Geheimrath Neumann nachgewiesen haben, und man

überhaupt voraussetzt, constant; d. h. das Stäbchen bricht bei einer ganz bestimmten Belastung, gleichviel ob es zuvor in die oder jene Gestalt gebogen ist; dass dasselbe mit $\overline{R}$, d. i. die im Moment des Brechens erlangte dauernde Biegung, nicht stattfindet, zeigt W. VIII. Denn Curve II hätte, bis zu Ende geführt, einen viel grössern Rückstand ergeben als III ergeben hat.

Die Vergleichung der Curven für Stäbchen von gleicher Länge und verschiedener Dicke, z. B. W. No. VI und X, O. No. II aus Serie I und No. II aus Serie II u. a. giebt den letzten allgemeinen Satz:

VII. Satz. *Je dicker bei sonst gleichen Umständen das Stäbchen ist, um so schneller steigt seine Rückstands-Curve und um so grösser ist* $\overline{R}$.

Ich gehe nun über zur Erörterung des Einflusses, den der Anfangsrückstand auf den Verlauf der Rückstands-Curven hat.

Voraus schicke ich, wie beim ersten Theil, einen fundamentalen Satz, der namentlich für die Bildung einer Vorstellung über die Vorgänge im Innern des Stäbchens von Wichtigkeit ist.

VIII. Satz. *Gebe ich dem auf ein Stäbchen ausgeübten* B *einen positiven Zuwachs* δB, *so kann ich den in Folge dessen zu* R *getretenen Zuwachs* δR *nicht dadurch wieder fortschaffen, dass ich auf das Stäbchen allein* δB *in der entgegengesetzten Richtung ausübe. Letzteres erzeugt vielmehr stets einen kleineren negativen Rückstandszuwachs als ersteres einen positiven.*

Das Belasten in einer der vorherigen entgegengesetzten Richtung geschah in praxi durch Belasten des vorher umgelegten Stäbchens. Man wird also, um den Beweis dieses Satzes aus den Curventafeln zu ersehen, den Verlauf am Ende einer Curve mit dem am Beginn der darauf folgenden vergleichen müssen.

Ich schliesse hieran zunächst 3 Sätze, die sich nur auf die Vergleichungen von Curven beziehen, die mittelst desselben Stäbchens, und zwar immer in derselben Lage (*ro* resp. *lu*) beobachtet worden sind.

IX. Satz. *Gleichen Anfangsrückständen entspricht ein gleicher Verlauf der Rückstandscurven.*

Der Beweis des Satzes liegt besonders in dem System W. No. II.

Bei der Vergleichung des Verlaufes von Curven mit verschiedenen Anfangszuständen sprechen sich die Resultate einfacher aus, wenn man unter der relativen Ordinate eines ihrer Punkte, die Höhe desselben über ihrem Ausgangspunkt versteht und auf die Lage der absoluten Abscissenaxe keine Rücksicht nimmt.

X. Satz. *Gehen mehrere Curven von verschiedenen Rückständen aus und überschreitet keine die grösste Abscisse der ersten von ihnen, so sind für gleiche Abscissen ihre relativen Ordinaten nahe proportional.*

Diese Curven laufen, wenn sie die grösste Abscisse der ersten von ihnen erreicht haben, nahe in einen Punkt zusammen; und darum sind ihre relativen Ordinaten zugleich nahe proportional mit der Tiefe ihres Ausgangspunktes unter dem Endpunkt der ersten Curve.

Zum Beweis führe ich die Curvensysteme Pw. $22^1/_2{}^0$ No. II, III, IV an. Die Curven II, IV, VI in No. II sind mit besonderer Rücksicht auf diesen Satz angestellt. (Nach dem II. Satze ist selbstverständlich, dass I. Biegungscurven mit anderen nicht diesem X. Satz gemäss zu vergleichen sind.)

Dieser X. Satz kann als eine Erweiterung des I. angesehen werden, der sich auf den speciellen Fall bezieht, dass der Anfangspunkt der neuen Curve dieselbe Ordinate hat, wie der Endpunkt der vorhergegangenen. Dann muss nach dem X. Satze jede Coordinate mit 0 proportional sein, also die Curve horizontal liegen.

Der 2. Theil des X. Satzes gilt nur angenähert, nur für grosse Biegungen, und ist von denen mit den kleinsten Anfangsrückständen am wenigsten erfüllt. Dies ergiebt sich aus der Betrachtung (siehe Fig. 17), dass, wenn man auf eine sehr kleine erste Biegung eine zweite sehr grosse im entgegengesetzten Sinne folgen liess, die nächste Curve, die die zweite in der ursprünglichen Lage des Stäbchens ist, um das Ende der ersten zu erreichen, äusserst schnell ansteigen müsste. Wäre gar die erste Biegung = 0 gewesen, so müsste die letzte senkrecht aufsteigen, und das widerspricht direct der Beobachtung.

XI. Satz. *a) Wenn eine Curve von grösserem Anfangsrückstand ausgehend, die grösste Abscisse* B *von allen, die von den vorhergegangenen Curven mit kleinerem Anfangsrückstand erreicht worden ist, überschreitet, ändert sie plötzlich ihren Gang, scheinbar in den derjenigen von den vorhergegangenen Curven, die den kleinsten Anfangsrückstand besitzt.*

Zum Beweise führe ich an W.

No. II. Curve I und V.
No. VIII. Curve I und III.

(Ausgangspunkte unsicher!)

Pw. $22^1/_2{}^0$ No. II. Curve II. und VI.
Pw. $33^3/_4{}^0$ No. I. „ I. „ III.
No. IV. „ I. „ V.
Gr. No. II.

Aus diesem Satze folgt, dass von irgend einer Stelle an alle von positiven Rückständen ausgehenden Curven mit derjenigen zusammenfallen, die vom natürlichen Zustande ausgehen würde. Dieses wurde von Wichtigkeit bei der Vergleichung einer mathematischen Curve mit einer empirischen; nur die Combination der vom natürlichen Zustand ausgehenden Curve, so weit sie beobachtet war, mit ihrer Fortsetzung durch eine spätere Beobachtungsreihe konnte mathematisch dargestellt wer-

den, nicht eine, welche solche erwähnte Unstetigkeit zeigte, für sich.

b) Wenn eine Curve mit kleinerem Anfangsrückstand die grösste Abscisse einer vorhergegangenen mit grösserem Anfangsrückstand überschreitet, so erleidet sie keine Unterbrechung der Stetigkeit.

Das ist am deutlichsten ausgesprochen durch Pw. $22^1/_2{}^0$ No. II, Curve VII, welche die grössten Abscissen von I, III und V überschreitet, ohne die geringste Unterbrechung des ruhigen Verlaufs zu zeigen, ausserdem durch Pw. $22^1/_2{}^0$ No. III, Curve III.

Nach diesen drei letzten Sätzen kann man für alle Curven, die auf eine früher beobachtete, welche bis B_1 und R_1 gegangen sein mag, direct folgen, ein Tableau bilden, das für jeden Anfangsrückstand (der kleiner als R_1 ist) den Verlauf der Curve giebt. Siehe Fig. 18.

Bis zur Abscisse B_1 nähern sich alle Curven der früheren, die obersten am meisten, die untersten am wenigsten. Von da ab fallen die oberhalb 0 beginnenden in die Fortsetzung von 0β hinein, die unteren gehen für sich weiter und tangiren dieselbe grösste Abscisse $\overline{B}$ für verschiedene Ordinaten $\overline{R}$. — Da das Stäbchen immer abwechselnd in beiden Lagen beobachtet werden muss, so ergeben sich zugleich Curvensysteme für beide Lagen des Stäbchens. Es bietet sich die Frage, ob beide, in dasselbe Coordinatensystem gezeichnet, sich decken.

XII. Satz. *Die den beiden Lagen des Stäbchens entsprechenden Curvensysteme sind um die Länge des ersten erzeugten Rückstandes, (der nach der eben gegebenen Definition der Curvensysteme auch der grösste überhaupt erreichte ist) parallel der Ordinatenaxe gegeneinander verschoben.*

Zum Beweis dieses Satzes sind die Curvensysteme W. II und VIII und Pw. $22^1/_2{}^0$ II aufgenommen worden. Die ersten Biegungen dieser Stäbchen sind zwar nicht graphisch dargestellt, da sie entweder gar nicht oder nur sehr unvollkommen auf den erzielten Rückstand untersucht sind, sie hielten sich aber innerhalb derselben Grenzen, wie die aufgezeichneten. Die ersteren beiden Systeme geben für sehr verschiedene Ausgangspunkte für beide Lagen des Stäbchens sehr vollkommen parallele Curven, das letztere ausserdem noch andere, die ein Bild von dem ganzen Curvensystem, welches jeder Lage entspricht, zeigen. Das System W. III ist aufgeführt, weil es diesen Satz scheinbar nicht bestätigt; freilich sind die den gezeichneten Curven vorhergegangenen mir nicht mehr bekannt und die Ausgangspunkte wegen der noch mangelhaften Beobachtungsmethode sehr unsicher. Dieses System, sowie auch die Absonderlichkeit des XII. Satzes veranlasst mich jedoch, bis nicht weitere Beobachtungen dafür sprechen, den Satz nur mit einem Vorbehalt auszusprechen.

§ 8.

Aufstellung einer mathematischen Form für den Rückstand als Function der elastischen Biegung.

Da eine jede der bis zu Ende geführten Curven von irgend einem Werthe B an lauter erste Biegungen darstellt, so bietet sich als einfachste Curve offenbar die durchaus ersten Biegungen entsprechende, und sie mathematisch darzustellen sei die Aufgabe. Zwar liegt bei den Curven erster Biegungen eine Unklarheit im ersten Anfange, indem dieselben eine kleine Strecke β mit der B Axe ganz zusammenfallen und sie dann unter irgend einem Winkel verlassen; aber diese Strecke ist, obgleich unbestimmbar, nach allen Beobachtungen doch sicher so klein gegen alle in Betracht kommenden Werthe von B und R, dass es jedenfalls ohne wesentlichen Einfluss ist, ob ich als Argument der mathematischen Form für R $\frac{B}{\overline{B}}$ oder aber $\frac{B-\beta}{\overline{B}-\beta}$ wähle. Darum kann ich auch im Folgenden immer $\frac{B}{\overline{B}}$ schreiben, wenn ich nur erinnere, dass die Curve, weil ersten Biegungen entsprechend, erst von $B = \beta$ aus beginnt.

Die gesuchte Function musste die Eigenschaft haben, dass

$$\left(\frac{dR}{dB}\right)_{B=\overline{B}} = \left(\frac{dD}{dB}\right)_{B=\overline{B}} = \infty,$$

ohne dass zugleich

$$\overline{R} = \infty \text{ wird.}$$

Demgemäss untersuchte ich die Functionen

$$C \,.\, arc.\, sin.\, \frac{B}{\overline{B}}$$

$$C \,.\, \sqrt{1-\left(\frac{B}{\overline{B}}\right)^2};$$

die letztere, da R für $B = 0$ selbst $= 0$ sein muss, aber nicht für $B = \overline{B}$, nur in der Verbindung

$$C\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{B}{\overline{B}}\right)^2}\right]$$

Diese eine Constante bestimmt sich überall durch den Grenzwerth für R beim Brechen des Stäbchens, so dass in Frage kamen

$$\frac{2\overline{R}}{\pi}\, arc.\, sin.\, \frac{B}{\overline{B}} \text{ und } \overline{R}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{B}{\overline{B}}\right)^2}\right]$$

Dass diese Formen aber nicht genügen konnten, selbst wenn sie zufällig die eine oder andere Curve von den beobachteten dargestellt hätten, zeigte sich schon daraus, dass sie verlangten, dass alle Curven identisch würden, wenn man sie in den Einheiten $\frac{R}{\overline{R}}$ und $\frac{B}{\overline{B}}$ aufzeichnete und das ist keineswegs der Fall.

Da ich den Wunsch hatte, einen geschlossenen Ausdruck für $R = F(B)$ zu finden, so liess ich mich nicht auf Reihen ein, die etwa nach Potenzen von $\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{B}{\overline{B}}\right)^2}\right)$ hätten fortschreiten können, sondern untersuchte eine Reihe von Exponentialgrössen von der Form:

$$R = B.C.e^{f(B)},$$

die im Exponenten trigonometrische Functionen hatten. Da F(B) für $B = \overline{B}$ einen unendlichen Differentialquotienten haben muss, so suchte ich eine Function von $\sqrt{1 - \left(\frac{B}{\overline{B}}\right)^2}$, sie sei

$$f(B) = \varphi\left[\sqrt{1 - \left(\frac{B}{\overline{B}}\right)^2}\right],$$

die, in den Exponent gesetzt, die obigen 2 Sätze erfüllte und mit den Beobachtungen übereinstimmende Werthe R ergäbe.

Setze ich $\frac{B}{\overline{B}} = \sin\alpha$, so ist zu suchen eine Function

$$\varphi(\cos.\alpha)$$

Ich liess nun $\cos\alpha$ von 0 aus, um je 0,1 wachsen und suchte zu den dafür sich ergebenden Werthen B, welche sein mögen

$$B_1, B_2, B_3, \ldots B_9$$

bei einer empirischen Curve die zugehörigen Rückstände auf:

$$R_1, R_2, R_3, \ldots R_9$$

eliminirte und aus den Gleichungen

$$R_1 = B_1 C e^{\varphi(0,1)}$$
$$R_2 = B_2 C e^{\varphi(0,2)}$$
$$R_9 = B_9 C e^{\varphi(0,9)}$$

die unbekannte Contante C, sodass sich fand:

$$l\frac{R_1}{B_1} - l\frac{R_2}{B_2} = \varphi(0,1) - \varphi(0,2)$$
$$l\frac{R_2}{B_2} - l\frac{R_3}{B_3} = \varphi(0,2) - \varphi(0,3)$$
$$l\frac{R_8}{B_8} - l\frac{R_9}{B_9} = \varphi(0,8) - \varphi(0,9)$$

Da zeigte sich, dass das Verhältniss der auf einander folgenden linken Seiten (allerdings mit Schwankungen auf und ab) constant war; z. B. ergab es sich für Pw. $33\frac{3}{4}^0$ No. I.:

1,76; 1,25; 1,28; 1,13; 1,48; 1,32

und für O. No. II. a. S. 1.:

1,31; 1,59; 1,20; 1,06; 1,21.

Es bestand also die Differentialgleichung

$$c = \frac{\varphi'(\cos.\alpha)}{\varphi'(\cos.\alpha) + \varphi''(\cos.\alpha)}$$

und daraus folgt, wenn d eine Integrationsconstante bezeichnet

$$\varphi(\cos.\alpha) = \frac{cd}{1-c}\left(e^{\frac{1-c}{c}\cos\alpha} - 1\right)$$

So bekomme ich für R eine Function mit 3 Constanten

$$R = B.Ce^{\frac{cd}{1-c}\left(e^{\frac{1-c}{c}\cos\alpha} - 1\right)}$$

Setze ich $B = \overline{B}$, also $R = \overline{R}$, so findet sich $C = \frac{\overline{R}}{\overline{B}}$;

bilde ich hingegen $\frac{dR}{d\overline{B}}$ für $B = \overline{B}$, so ergiebt sich $d < o$,

so dass ich, da $o < \frac{1-c}{c} < 1$ ist, setzen kann:

$$\frac{1-c}{c} = +k; \quad \frac{cd}{1-c} = -p,$$

so dass meine Function definitiv wird:

$$\frac{R}{\overline{R}} = \frac{B}{\overline{B}} e^{-p\left(e^{k\sqrt{1-\left(\frac{B}{\overline{B}}\right)^2}} - 1\right)};$$

für das Verhältniss $\frac{B}{\overline{B}}$ kann darin das mit ihm identische der Belastungen $\frac{p}{\overline{p}}$ oder auch der Spannungen in der Oberfläche $\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}$ gesetzt werden.

Die Berechnung der Constanten $\overline{R}$, p, k für eine empirische Curve geschah nach einer Methode, die eine Erweiterung der in § 4 für die Gleichung

$$R_t = R_\infty (1 - e^{-q(t+t_0)})$$

erörterte war. Es sind die 10 Werthe der obigen Function für $\cos\alpha = 0{,}0\ 0{,}1\ 0{,}2 \ldots 0{,}9$ berechnet worden, nicht die den beobachteten Stellen entsprechenden.

Die 3 Curven für die Rechnung ausgeführt, weil ich sie für besonders sicher halte, sind Pw. $33\frac{3}{4}^0$ I., O. I a. S. 1 und O. II a. S. 2. Bei der ersten ist die I. Biegung mit ihrer Fortsetzung durch die dritte condinirt. Wegen der im Verzeichniss angeführten kleinen Unsicherheit des Ausgangspunktes ist zu Anfang statt der (beobachteten) ausgezogenen Curve die punktirte der Rechnung zum Grunde gelegt, an der wegen einer Erschütterung unsichern Stelle (!) ist die willkürliche Verbesserung jener fehlerhaften (punktirten) Strecke benutzt.

O. II a. S. 1 ist zwar schon früher gebogen, ist aber darnach um die Hälfte dünner geschliffen worden und auf die gerade Form durch eine geringe Biegung zurückgeführt.

O. II a. S. 2 ist zuvor geringen Biegungen unterworfen gewesen und auf die natürliche Form zurückgebracht.

Bei der Vergleichung der berechneten mit der beobachteten Curve bedenke man, dass die letztere durch

ein Polygon dargestellt ist, der Rechnung aber eine ungebrochene Curve durch alle Punkte zu Grunde gelegt ist. Die Beobachtungsfehler stecken im Anfange der Curve zumeist in R, am Ende in B.

Die grösste elastische Biegung $\overline{B}$ ist aus der Belastung im Moment des Brechens p berechnet, und zwar, da dies Brechen stets zu früh erfolgt, vermuthlich zu klein. Es steht also zu erwarten, dass die Curven, die mit demselben berechnet sind, eine stärkere Krümmung zeigen, als die beobachteten. Eine solche Abweichung würde also nicht gegen die Uebereinstimmung meiner empirischen Formel mit der Beobachtung sprechen. Und in der That ist dies die einzige merkliche Abweichung von dieser Art.

Es erübrigt noch eine Zusammenstellung der Werthe der Constanten für die 3 Stäbchen.

Es ist für:	k	p	$\overline{R}$	während	D	L
Pw. 33¾° I.	3,0	0,26	508		0,55 mm.	50 mm.
O. II. a. S. 1.	2,6	0,31	498		0,55 „	60 „
O. II. a. S. 2.	2,4	0,38	1160		0,87 „	68 „

Hiernach scheinen die Dimensionen des Stäbchens auf k und p nur sehr geringen Einfluss zu haben, bedeutenden hingegen auf $\overline{R}$. Dies ist um so grösser, je dicker bei sonst gleichen Umständen das Stäbchen ist.

§ 9.

Entwickelung einer Vorstellung vom Zustande der Stäbchen, während sie einen Rückstand zeigen, die die beobachteten Erscheinungen erklärt.

Der Zweck dieser Betrachtung ist, eine Vorstellung darzulegen, welche aus möglichst wenig Annahmen die im vorletzten Paragraphen aufgeführten Sätze abzuleiten gestattet.

Das Problem des Rückstandes in gebogenen Stäben ist, ebenso wie das ihrer elastischen Biegungen, ein zusammengesetztes, und muss zurückgeführt werden auf das des Rückstandes in elementaren Prismen, die in ihrer Längsrichtung comprimirt und dilatirt sind. Das letztere direct anzugreifen dürfte grosse Schwierigkeiten haben, weil Beobachtungsobjecte zur Messung der Dilatation sich kaum zur Messung der Compression eignen werden, zumal wenn sie aus solchen Medien bestehen, in denen man noch den natürlichen Zustand voraussetzen darf, — d. h. aus Kristallen. Um über das Wesen des Rückstandes Klarheit zu erlangen, scheint es mir aber wichtig, sowohl seine Entstehung als seine Zerstörung in Betracht zu ziehen, — und dazu eignet sich, wie ich gezeigt zu haben meine, die Biegung von Stäben vorzüglich. Die erste Frage würde demnach sein: Welche Eigenschaften ist man durch die oben ausgesprochenen Sätze genöthigt, dem beim Dilatiren und Comprimiren von Stäben entstehenden Rückstand beizulegen.

Nicht zu umgehen ist, solange man sich nicht auf Molekularphysik einlässt, der erste (Fundamental-) Satz, welcher im Wesentlichen sagt:

I. *Wenn irgend eine Belastung des Stäbchens ihre volle Wirkung geäussert hat, bringt keine kleinere noch auch die wiederholt angewandte gleiche einen Rückstandszuwachs hervor.*

Dieser mag denn als der erste für das Grundphänomen geltende Satz hier stehen.

Für die weitere Betrachtung sollen folgende Bezeichnungen eingeführt werden: Der absolute Werth der elastischen Dilatation einer Schicht des Stäbchens von der Länge 1 sei $= \delta$, die dauernde $= \Delta$, die Summe beider, d. i. die vollständige Dilatation: $\Delta + \delta = v$, der Abstand dieser Schicht von der neutralen $= x$; der Krümmungsradius der neutralen Schicht $= \varrho$; die Dicke des Stäbchens D, die Breite B. —

Ein aus dem Stäbchen geschnittenes Parallelopiped (Fig. 19) erleidet in allen Schichten, die über ihre Elasticitätsgrenze dilatirt worden sind, eine bleibende Formveränderung. Nach der Entlastung kann dasselbe nicht die Gestalt annehmen, die ihm durch die Dilatation aufgeprägt ist; gehindert von den Nachbarprismen, erleiden die am meisten verlängerten Schichten eine elastische Compression, die andern eine Dilatation, deren Momente gleich sein müssen, damit Gleichgewicht stattfindet. Durch den mathematischen Ausdruck dieses Vorganges erhält man eine Gleichung für den Krümmungsradius der neutralen Schicht, gegeben durch den Rückstand in den einzelnen Schichten. Es ist nämlich nach der Entlastung die elastische Dilatation einer Schicht im Abstand x von der neutralen

$$\delta = \frac{\frac{x}{\varrho} - \Delta}{1 + \Delta},$$

wo Δ eine unbekannte Function von x ist, oder da Δ gegen 1 immer sehr klein ist

$$\delta = \frac{x}{\varrho} - \Delta.$$

Dies Δ wird aber in den comprimirten Schichten ein anderes sein, als in den dilatirten, ich unterscheide deshalb, da das erstere die Länge verkleinert, das letztere vergrössert, Δ_- und Δ_+ und habe

$$\delta_+ = \frac{x}{\varrho} - \Delta_+ \text{ für die untern,}$$

$$\delta_- = \frac{x}{\varrho} - \Delta_- \text{ für die obern Schichten}$$

des Stäbchens.

Nun ist nach I. § 2 die in einer Schicht erregte elastische Kraft:

$$P = EB\delta dx.$$

Die Summe ihrer Momente für alle Schichten muss $= 0$ sein, dies giebt

$$\int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} x\delta dx = 0,$$

oder nach den obigen Werthen von δ

$$\frac{D^3}{12\varrho} = \int_{o}^{\frac{D}{2}} (x\Delta_+ dx + x\Delta_- dx).$$

Diese Δ sind Functionen der durch die vorhergegangene Belastung der Schicht ertheilten vollständigen Dilatation v, die gegeben ist durch

$$v = \frac{x}{\varrho_o} \quad \text{(siehe Figur 25)},$$

wenn ϱ_o den Krümmungsradius bezeichnet, den an der Stelle, an der das oben erwähnte Prisma ausgeschnitten ist, die neutrale Schicht während der Belastung hatte.*)

Es giebt sich also, für die Belastungszeiten da $\frac{L^2}{12\varrho} = \mathrm{R}$ ist, der Rückstand im Stäbchen durch folgende Gleichung:

$$\mathrm{R} = \frac{L^2}{D^3} \int_{o}^{v_1} \varrho_\delta{}^2 v\, dv\, (\Delta_+ + \Delta_-)$$

worin v_1 diejenige vollständige Dilatation ist, die durch eine vorhergegangene Biegung der eben erörterten Stärke in der Oberflächenschicht erzeugt ist.

Ist die vorausgegangene Biegung $\mathrm{D} = o$, so ist $\mathrm{R} = o$ und auch $v_1 = o$, also verschwindet die linke Seite schon wegen der Grenzen. Dass aber ausserdem Δ_+ und Δ_- für $v_1 = o$ selbst $= o$, ist selbstverständlich.

Jenachdem die Biegung eine erste oder eine beliebige andre war, sagte der II. Satz, dass für $\mathrm{B} = 0$

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{B}} \gtreqless 0$$

daraus folgt, dass zugleich:

$$\frac{L^2}{D^3} \varrho_0{}^2 v_1 (\Delta_+ + \Delta_-) \frac{dv_1}{d\mathrm{B}} \gtreqless 0, \text{ für } \mathrm{B} = 0.$$

Hierin ist aber $v = 0$, $\Delta_+ = 0$, $\Delta_- = 0$, $\varrho_0 = \infty$, also der Gesammtwerth von der Form $0 \,.\, \infty$. Da aber $\frac{dv}{d\mathrm{B}}$ sicher endlich ist, da $v_1 = \Delta_1 + \delta_1$ und $\frac{d\delta_1}{d\mathrm{B}}$ endlich ist, so betrachte ich nur $v_1 (\Delta_+ + \Delta_-) \varrho_0{}^2$ welches

ist $= \frac{(\Delta_+ + \Delta_-)}{v_1} v_1{}^2 \varrho_0{}^2$.

$v_1 \varrho_0$ ist aber $= \frac{\mathrm{D}}{2}$; der Bruch hingegen $= \frac{0}{0}$; dieser wird aber $= 0$ oder nicht $= 0$, jenachdem $\frac{d(\Delta_+ + \Delta_-)}{d\delta}$ $= 0$ oder nicht $= 0$ wird. Und dies findet hiernach statt, jenachdem $\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{B}}\right)_{\mathrm{B}=0} = 0$ oder nicht $= 0$ ist.

*) NB. Diese Gleichung gilt für die elastische Dilatation, wenn der Rückstand $= 0$ ist.

Es wäre aber vorschnell zu sagen, dass das Letztere nothwendig ergäbe, dass ein Elementarprisma zu Anfang einer jeden Belastungsreihe ausser der ersten keine Elasticitätsgrenze hätte. (Verg. oben Satz II.)

Stellt man nämlich die bleibenden Dilatationen, wie in Fig. 20 als Ordinaten über dem Querschnitt des Stäbchens von $-\frac{D}{2}$ bis $+\frac{D}{2}$ dar, und ist der mittlere Zustand durch δ^1 gegeben, so erkennt man, dass die elastische Spannung $\delta^1 - \Delta$ zwischen β und γ den Rückstand nach dem I. Satz für Δ unverändert lässt, hingegen zwischen α und β und γ und ε verkleinert. Dieses Verkleinern hat eine verschiedene Wirkung, jenachdem die Schichten diesen elastischen Kräften gegenüber eine Elasticitätsgrenze haben oder nicht. Im erstern Falle kann bei sehr kleinen Deformationen des ausgeschnittenen Prismas durch die vorangegangene Biegung die Elasticitätsgrenze durch diese nachwirkenden Kräfte noch nicht überschritten sein, und dann muss die Beobachtung bei einer der vorhergehenden entgegengesetzten Belastung eine im Anfangspunkt tangirende Curve geben, bei grossen vorhandenen Deformationen hingegen eine nicht tangirende. Ist hingegen keine Elasticitätsgrenze vorhanden, so darf unabhängig von den vorhergegangenen Biegungen keine Curve tangiren. Dies haben die Beobachtungen für das Steinsalz ergeben; ich weise nur hin auf Pw. $33^3/_4{}^0$ I. wo die III. Curve, obgleich das Stäbchen fast gar nicht deformirt ist, von der ersten sehr abweicht. Und darum ist die 2. Grundeigenschaft für die Elementarprismen:

II. Satz. *Für $\delta = 0$ ist $\frac{d\Delta}{d\delta}$ nicht $= 0$ mit Ausnahme des einzigen Falles, wenn das Stäbchen noch nie dilatirt ist.*

Der III. Satz für R, dass überall $\frac{d^2\mathrm{R}}{d\mathrm{B}^2}$ mit B wächst, ergiebt sich aus der erörterten Vorstellung von selbst, da $\frac{dv_1}{d\mathrm{B}}$ und $\frac{d^2 v_1}{d\mathrm{B}^2}$ sicher positiv ist,

Es ist selbstverständlich, dass die Rückstandscurve für die obern comprimirten Schichten des Stäbchens mit wachsender Belastung immer flacher wird und für unendlichen Druck horizontal liegt. In ihr wird also im Moment des Brechens kein ausgezeichneter Punkt erreicht sein. Darum wird das Unendlichwerden von $\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{B}}$, was im Moment des Brechens gemäss dem IV. Satz stattfindet nur von

$$\varrho_0{}^2 v_1 \Delta_+ \frac{dv_1}{d\mathrm{B}}$$

verursacht sein und das ergiebt, da ϱ_o sicher nicht $= \infty$ ist, noch auch Δ_+ und v_1, dass

$$\frac{dv_1}{d\mathrm{B}} = \frac{d(\Delta_+ + \delta_+)}{d\mathrm{B}} = \infty$$

sein muss, oder da $\frac{d\delta}{d\mathrm{B}}$ immer endlich ist, den

III. Satz. *Für den Moment des Zerreissens des Elementarprismas ist* $\frac{d\Delta_+}{d\delta} = \infty$.

Aus dem Integral für R erkennt man ferner sofort den dem V. Satz für R entsprechenden

IV. Satz. *Obgleich für* $\delta = \bar{\delta}\ \frac{d\Delta_+}{d\delta} = \infty$ *ist, bleibt doch* Δ_+ *endlich.*

Ebenso folgt aus dem VI. Satz für R für Δ der

V. Satz. $\bar{\Delta}_+$ *ist keine dem Elementarprisma individuelle Constante.*

Der VII. Satz für R: „je dicker das Stäbchen ist, um so steiler steigt seine Rückstandscurve, um so grösser ist sein $\bar{\mathrm{R}}$“, ergiebt sich aus unserer Vorstellung von selbst.

Denn $$\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{D}} = \frac{L^2}{D^3}\varrho_0{}^2 v_1 (\Delta_+ + \Delta_-)\frac{dv_1}{d\mathrm{D}}$$

ist $$= \frac{L^2}{4D}\left(\frac{\Delta_+ + \Delta_-}{v_1}\right)\cdot\frac{dv_1}{d\mathrm{D}}$$

und $\frac{dv_1}{d\mathrm{D}}$ ist proportional mit D^3, $\frac{\Delta+ + \Delta_-}{v_1}$ hingegen von D unabhängig, da es das Verhältniss der in einer Schicht erzeugten vollständigen Dilatation zu ihrem Rückstand bezeichnet.

Gehe ich von dem III. Satz für $\Delta+$, und von der wohl selbstverständlichen Annahme aus, dass der Werth von Δ_- für $\delta = -\infty$ unabhängig von dem Anfangszustand des Prismas $= 1$ ist, so kann ich daraus Eigenschaften von $\Delta+$ und Δ_- ableiten, die die Sätze VIII, IX, X, XI für R völlig erklären. Ich denke mir $\Delta+$ und Δ_-, d. h. die positiven und negativen dauernden Dilatationen der Längeneinheit, als Functionen der elastischen Dilatationen aufgezeichnet; diese Dilatationen sollen nicht die ersten sein, die das Prisma erleidet, weil dieser Fall eine von allen übrigen abweichende Curve giebt, und nur einen Anfangsrückstand, nämlich $= o$, erlaubt; — sie sollen aber auch nicht beliebige spätere sein, da sie dann, je nach der Art und Ausdehnung der vorhergegangenen, verschiedene Curven bei demselben Anfangsrückstand ergeben könnten; ich lege vielmehr die Annahme zu Grunde, dass die Dilatationen keine ersten sind, dass sie von beliebigen Anfangsrückständen beginnen können, und dass sie verlaufen, ohne dass die vorhergegangene Dilatation Einfluss hat.

[Anmerkung. Dieser einfachste Zustand des Prismas lässt sich theoretisch folgendermassen hervorbringen: Das Prisma wird bis unendlich nahe an $\delta = \bar{\delta}$ (resp. $\delta = -\infty$) dilatirt, dadurch hat es den grössten positiven (resp. negativen) Rückstand erlangt. Ein folgendes Comprimiren (resp. Dilatiren) kann es auf jeden beliebigen Anfangsrückstand bringen, von dem aus man $\Delta+$ (resp. Δ_-) untersuchen will.] Jedem Anfangsrückstand entspricht nun eine Curve für $\Delta+$, eine für Δ_-. Diejenigen die vom Anfangsrückstand o ausgehen, seien oA für $\Delta+$, oB für Δ_- (siehe Figur 21). Wenn ich nun sage: ich führe das Elementarprisma von o nach β, so verstehe ich darunter: ich belaste es so stark, dass seine elastische Dilatation $\delta =$ der Abscisse, und demgemäss seine dauernde, $\Delta =$ der Ordinate des Punktes β wird. Nach diesen Erörterungen werden meine Schlüsse verständlich sein.

Ich führe das Elementarprisma von o bis β und dilatire es darauf, so beginnt seine Curve in β_1 (denn die Punkte der Ordinatenaxe entsprechen dem unbelasteten Zustande). Die Frage ist: welche Eigenschaft hat diese Curve? Sie kann nicht die Umkehr derjenigen sein, auf der von o aus β erreicht worden ist, denn dann könnte sie für $\delta = \bar{\delta}$ nicht senkrecht stehen; es kann also, und ich fasse dies als **Satz VI a,** *keinesfalls die Zurückführung von einem grössten* Δ_- *nach einem kleineren auf demselben Wege geschehen, auf dem dasselbe erreicht worden ist.*

Die Curve kann aber eben so wenig unabhängig von der Lage von β_1, parallel mit oA sein, denn sonst könnte man, indem man nach Erreichung eines grossen $\Delta+$ im Punkte A_1, ein wenig comprimirte, dann wieder stark dilatirte u. s. f. das Prisma auf dem Wege $\beta_1 A_1 \alpha_1 \beta_2 A_2 \alpha_2 \ldots$ bis zu einem beliebig grossen, also auch unendlich grossen $\Delta+$ führen. Ich habe aber niemals ein $\bar{\mathrm{R}}$ beobachtet, das grösser als $2\,\bar{\mathrm{B}}$ gewesen wäre, und darum ist dieses Verhalten unwahrscheinlich; es ergiebt sich aber als unmöglich durch die folgende Betrachtung: Führe ich das Prisma von dem Anfangspunkt α bis an den Punkt des Zerreissens A, so findet sich nach Satz I als Curve für $\Delta+$ eine horizontale Linie. Die Curve, auf welcher ich oben das Prisma zu einem unendlich grossen $\Delta+$ führen wollte, müsste diese genannte schneiden und mit ihr unendlich viele ihr nahe benachbarte, darunterliegende. Sei γ der Schnittpunkt irgend zweier Curven, so hat das Prisma in ihm genau denselben Zustand, d. h. genau dasselbe δ u. $\Delta+$, ob es nun auf der einen oder andern Curve nach γ geführt ist, es hat also auch dieselbe Fähigkeit auf der einen, als auf der andern weiter zu gehen. Da aber diese Möglichkeit an unendlich vielen Punkten der Curve stattfindet, so würde die Curve ganz unbestimmt sein, entgegen allen Beobachtungen, die eine Gesetzmässigkeit der Curven ausser

allen Zweifel stellen und insbesondere entgegen dem III. Satze für $\Delta+$. Hiernach ist also klar

Satz VII a, *dass keine 2 von den Curven für $\Delta+$, die von allen Stellen der Ordinatenaxe ausgehen, sich schneiden dürfen, und dass sie alle unterhalb der Horizontalen durch A bleiben müssen.* Es werden zwar alle zwischen o und α ausgehenden in A endigen, nicht aber alle unterhalb o beginnenden, denn das widerspräche dem V. Satze für $\Delta+$.

Ich will nun eine analoge Eigenschaft der Curven für $\Delta_$ nachweisen.

Von jedem durch Dilatation erreichten Punkte der Ordinatenaxe muss die durch eine folgende Compression erhaltene Curve für $\Delta_$ eine Parallele zur Abscissenaxe im Abstand $= -1$ für $\delta = -\infty$ tangiren; zugleich dürfen sich die von allen Punkten der Ordinatenaxe ausgehenden Curven nirgends schneiden, daher ist klar,

Satz VII b, *dass die Curven für $\Delta_$ um so steiler abfallen werden, je höher ihr Anfangspunkt liegt, und dass die tiefste von ihnen die Parallele zur Abscissenaxe im Abstand $= 1$ ist.*

Hieraus geht auch für $\Delta+$ hervor der

Satz VI b, *dass das Zurückführen des Prismas von einem grössten erreichten $\Delta+$ zu einem kleineren auf einem andern Wege geschieht, als auf dem es zu ihm gelangt ist.*

Um die 4 Sätze VIII, IX, X, XI für R vollständig abzuleiten, betrachte ich nun noch den Einfluss einer vorgenommenen positiven oder negativen Dilatation auf alle folgenden (Fig. 22). Hat man das Prisma von o bis α_1 geführt und hierauf (durch Compression) zurück bis zu einer Stelle γ der Ordinatenaxe, so giebt diese den Anfangszustand für eine neue Dilatation an.

Liegt γ in α, so ist die Curve für $\Delta+$, nach dem I. Satze für Δ, eine Gradparallele der Abscissenaxe, und zwischen ihr und $o\alpha$ liegen die allen andern positiven Ausgangsrückständen entsprechenden.

Die Curven für negative Anfangsrückstände werden nicht geändert.

Es ist nun zugleich klar, dass, da sich die Curven nirgends schneiden dürfen, sämmtlich zwischen o und α_1 ausgehende Curven die Fortsetzung αA haben; denn höher als A dürfen sie, wie früher erörtert, nicht endigen.

Das Analoge für $\Delta_$ nachzuweisen ist unnöthig, ein Blick auf Fig. 22 zeigt, dass für dasselbe ganz analoge Verhältnisse stattfinden, als für $\Delta+$.

Durch diese Betrachtungen sind die Sätze VIII. IX, X, XI für R als nothwendige Folgen der aus 3 angenommenen Sätzen sich ergebenden Eigenschaften von Δ erwiesen. Der Zusammenhang ist so klar und einfach, dass ich nicht weiter darauf einzugehen brauche. Ich habe absichtlich bei der Aufstellung der Sätze für R nirgends Genaueres behauptet, als sich aus den Curventafeln wirklich ablesen liess, habe sie sogar in der Form gelassen, die ich ihnen gegeben, noch ehe ich diese theoretischen Betrachtungen anstellte. Die Vergleichung mit den analogen Sätzen für Δ bringt in dieselben erst die rechte Klarheit, lässt z. B. erkennen, warum bei Pw. $22\frac{1}{2}^0$ II Curve II, IV, VI so genau in einen Punkt zusammenlaufen, nämlich weil diese nach Fig. 22 zwischen o und α_1 ihren Ursprung haben; desgleichen, warum die Curven III, V, VII, welche tiefer als I entspringen, sich einander sehr wenig nähern. Auch die in Bezug auf das System, Curven II, IV, VI, erwähnte Proportionalität der relativen Ordinaten wird durch die letzte Betrachtung erklärt.

Es erübrigt noch eine Erklärung des XII. Satzes für R: dass die den beiden Lagen des Stäbchens entsprechenden Curvensysteme um die Grösse des durch die erste Belastungsreihe erzielten Rückstandes gegeneinander verschoben sind. Bis spätere Beobachtungen diesen Satz in Frage stellen, bin ich zu folgender Annahme gezwungen (siehe dazu Fig. 23):

Die erste Dilatation eines Elementarprismas giebt eine gewisse Curve für $\Delta+$, sie sei oA. Führt man das Prisma aber zuvor durch Compression von o bis β, so müsste nun von β_1 eine Curve ausgehen, die steiler stiege als oA, wenn die vorhergegangene Compression keine erste wäre; für diesen Fall findet aber eine Ausnahme statt und die Curve $\beta_1 A_1$ ist parallel mit oA, also das ganze Curvensystem für $\Delta+$ um $o\beta_1$ gegen das für $\Delta_$ verschoben. Das heisst, mehr physikalisch ausgesprochen:

VIII. Satz. *Ein Elementarprisma verliert die Eigenschaften des natürlichen Zustandes einer Ausdehnung gegenüber nicht dadurch, dass es einmal comprimirt worden ist.*

Das Entsprechende für $\Delta_$ anzunehmen hat eine kleine Schwierigkeit, da alle Curven für $\Delta_$ in $-\infty$ die Horizontale im Abstand $-^1$ von der Abscissenaxe tangiren müssen.

Es ist also eine Verschiebung des ganzen Systems nicht zu denken möglich. Man kann nur annehmen, dass, nachdem das Prisma von o bis α geführt ist (siehe Fig. 24), die von α_1 ausgehende Curve in ihrem ersten Theile mit oB parallel ist, im Unendlichen aber mit ihr zusammenfällt.

Anmerkung. Ich habe bei der Ableitung des II. Satzes für Δ gezeigt, dass nach der Entlastung eines gebogenen Stäbchens in den äusseren Schichten elastische Kräfte wirksam werden, die den in jenen vorhandenen Rückstand, und dadurch den am Stäbchen beobachteten, verkleinern. Diese Thätigkeit ist die sogenannte elastische Nachwirkung, welche also für den Fall des Biegens von Stäben hierdurch erklärt, — d. h. als ein Rückstandphäno-

men, wie alle die besprochenen, erkannt ist. Dass dieselbe für das Steinsalz selbst nach bedeutenden Belastungen fast unmerklich ist, weist darauf hin, dass die bleibende Deformation eines aus dem Stäbchen geschnittenen Prismas mit der in Fig. 20 durch δ^1 gegeben mittleren, wie sie durch die Einwirkung der anliegenden Theile bedingt ist, sehr nahe übereinstimmt; d. h. aber, dass die Elasticitätsgrenze eines Steinsalzprisma's im natürlichen Zustande eine äusserst kleine und der Rückstand zu Anfang eine beinahe lineäre Function der Belastung ist. Das ist auch durch directe Beobachtung bestätigt worden.

ANHANG I.

Zusammenstellung und Discussion der beiläufig gefundenen grössten Werthe der Spannung, welche die Stäbchen verschiedener Gattungen ertragen.

Für die Belastungsstelle des Stäbchens, in welcher die Krümmung am grössten ist, folgt unter der Voraussetzung, dass die Gestalt als wirklich prismatisch angenommen wird, die Dilatation einer Schicht im Abstande x von der neutralen:

$$\frac{\delta l_x}{l} = \frac{x}{\varrho} = \frac{3\Pi L x}{ED^3B},$$

also die der äussersten, wo $x = \frac{D}{2}$ ist

$$\delta = \frac{3}{2}\frac{\Pi L}{ED^2B}.$$

Dies ist streng nur dann richtig, wenn das Stäbchen gar keine dauernde Biegung angenommen hat, andernfalls giebt diese Formel die Oberflächenspannung zu gross an. Da es sich aber bei mir nicht um absolute Werthe handelt, und die Beobachtungen ausserdem an und für sich höchst ungenau sind, nehme ich diese Gleichung als richtig an.

Herr Geheimrath Neumann hatte mir bereits mitgetheilt, dass für eine jede Substanz der Werth dieser Dehnung in der Oberfläche für den Moment des Brechens oder Reissens eine Constante wäre, und dass sie z. B. für Glas im Durchschnitt den Werth $\frac{1}{1440}$ hätte. Ich beschloss demzufolge, zu untersuchen, ob der an in verschiedenen Richtungen geschnittenen Stäbchen schon von Herrn Prof. Sohnke beobachteten verschiedenen Tragfähigkeit verschiedene Oberflächenspannungen entsprächen. Nachdem ein grosser Theil der Stäbchen bei den Untersuchungen des Rückstandes zerbrochen war, konnte ich für diese Frage nicht soviel Material verwenden, als wünschenswerth war, und ich theile darum die Resultate meiner Messungen nur als einen Beitrag zur Lösung dieser Frage mit, der aber in Verbindung mit den in der Einleitung erwähnten Beobachtungen von Herrn Prof. Sohnke, mit denen die meinen den Resultaten nach übereinstimmen, vielleicht etwas mehr Wichtigkeit erhält, als er für sich beanspruchen könnte.

Die Belastung meiner Stäbchen geschah mit dem in II, § 2 besprochenen Zuflussapparat; die Beobachtungen wurden, um ganz sicher von Erschütterungen befreit zu sein, zumeist Nachts angestellt.

In der obigen Formel

$$\delta = \frac{3}{2}\frac{\Pi L}{ED^2B}$$

kommt die Dicke in der 2. Potenz und der Elasticitätscoefficient vor: diese Grössen waren aber, wie früher vielfach erörtert, durch kleine Veränderungen in der Oberfläche grossen Unsicherheiten ausgesetzt. Um diese nach Möglichkeit zu vermeiden, beobachtete ich bei mehreren kleineren Belastungen*) die elastische Biegung B des untersuchten Stäbchens

$$B_1 = \frac{\Pi_1 L^3}{4ED^3B}$$

und eliminirte hierdurch E und das Quadrat von D. Bezeichnet $\overline{\Pi}$ das Gewicht, bei dem das Brechen erfolgt, und $\overline{\delta}$ die vorhandene Dilatation in der Oberfläche, so giebt sich

$$\overline{\delta} = \frac{6\,\overline{\Pi} D B_1}{L^2\Pi_1}.$$

Nebenbei ersparte ich hierdurch die Messung der Breite B.

Die zunächst hervortretenden Resultate sind folgende.

Erstens brechen die Stäbchen stets nach Würfelflächen.

Zweitens haben im Allgemeinen die dünneren Stäbchen eine stärkere Spannung erduldet, als die dickeren; während man hätte vermuthen sollen, dass Erschütte-

*) In dem darauf bezüglichen Capitel habe ich nachgewiesen, dass der Elasticitätscoefficient soweit von der bleibenden Biegung unabhängig ist, als für die hier verfolgten Zwecke nöthig ist.

rungen die dünneren empfindlicher gefunden hätten, als die dickeren.

Drittens zeigte es sich sehr auffällig, dass alle die Stäbchen, welche in 3 Stücken zerbrachen (indem entweder an der Belastungsstelle sich ein kleines Dreieck zwischen den beiden Hälften des Stäbchens bildete, oder die eine Hälfte noch einmal in 2 Stücken zersprang), eine bedeutend grössere Spannung ertragen hatten, als die andern von derselben Gattung.

Nachdem ich auf diese 3 Punkte aufmerksam gemacht habe, will ich die Resultate der Messungen hier zusammenstellen. Ich wende zur Characteristik der Stäbchen dieselbe Bezeichnung an, wie in den früheren Untersuchungen, und wiederhole nur, dass von den Stäbchen längster Gattung die beiden Hälften noch einmal benutzt wurden, und dass die Hälfte mit der Marke durch einen Index $_1$, die ohne Marke mit $_o$ bezeichnet sind.

Ein beigeschriebenes „M“ deutet an, dass der Bruch in der Mitte erfolgte; „1^{mm} v. M“, dass die Bruchfläche 1 Millimeter von der Mitte entfernt war.

W.		D_m	L	$1:\overline{\delta}$	
(Serie 2.)	I_o	0,905^{mm}	33,75^{mm}	3050	M.
	I_I	0,85 „	31,5 „	3200	„
	IV_o	0,52 „	29,25 „	3000	„
	VII_o	0,52 „	31,5 „	2500	„
	IX_o	0,67 „	31,5 „	2600	„
	IX_I	0,68 „	31,5 „	2600	„
	II	0,64 „	63 „	2500	„
(Serie 3.)	XIV	1,00 „	50 „	3200	„
Pw. 11¼°					
(Serie 2.)	I	0,72 „	63 „	2000	„ (1,5^{mm} v. M.)
Pw. 22½° Stäbchen normal zum Pyramidenwürfel v. 22½°.					
(Serie 1.)	I	0,97^{mm}	45^{mm}	2100	M.
(Serie 2.)	IV	0,74 „	40,5 „	1900	„
Pw. 33¾°					
(Serie 2.)	I	0,56 „	50 „	1400	(?)
	IV	0,73 „	58,5 „	1600	M.
	IV_I	0,77 „	31,5 „	1200	„

Diese Gattungen zeigen alle fast gar keine Störungen; sehr unangenehm hervortretend sind dieselben, weil fast alle Stäbchen unregelmässig gebrochen sind, und die Resultate darum keinen Werth haben bei der folgenden:

Gr.		D_m	L	$1:\overline{\delta}$	
(Serie 2.)	II	0,58^{mm}	58,5^{mm}	1400	1,5^{mm} v. M.
	II_o	0,55 „	31,5 „	950	(Dreieck aus-
(Serie 3.)	IX	0,82 „	63 „	1700	gebrochen.)
	Dies Stäbchen zerbrach, während die Belastung langsam wieder vermindert wurde.				
	IX_o	0,80^{mm}	31,5^{mm}	1020	M.
	Die eine Hälfte noch einmal zersprungen.				
	IX_I	0,84^{mm}	31,5^{mm}	1200	M.
	X	0,97 „	50 „	1070	2^{mm} v. M.
O.					
(Serie 1.)	II	0,56 „	60,75	1300	„
	(Hier war schon vor dem Brechen ein kleiner Sprung da.)				
(Serie 2.)	II	0,87^{mm}	67,5^{mm}	1100	5^{mm} v. M.
	II_I	0,87 „	38,0 „	930	(Dreieck!)
(Serie 3.)	I	1,01 „	45.0 „	1130	M.
	IV	0,88 „	50,0 „	1270	„

Bevor ich daran gehe, aus diesen Werthen Schlüsse zu ziehen, scheint es mir nicht unwichtig, noch einige andere anzugeben, die sich bei den Rückstandsbeobachtungen, wo die Stäbchen mit der Schraube gebogen wurden, nebenbei ergaben, und die das oben Gesagte bestätigen helfen.

			D_m	L	$1:\overline{\delta}$	
W.	(Serie I.)	II.	1,03^{mm}	56,3^{mm}	3000	M.
	(Serie II.)	II_I	0,62 „	31,5 „	2300	„
		VI.	0,37 „	40,5 „	1600	„
		VIII.	0,55 „	63 „	1900	1^{mm} v. M.
Gr.	(Serie II.)	IV.	0,65 „	56,3 „	1200	M.
		V.	0,48 „	38,3 „	950	(Dreieck!)
		VI.	0,62 „	36 „	1500	M.

Die Bemerkung, dass im Allgemeinen die dünneren Stäbchen eine grössere Oberflächenspannung ertragen zu haben scheinen, lässt sich durch Zusammenwirkung verschiedener Umstände erklären. Einmal ist der angewandte Werth des reciproken Krümmungsradius nur für im Verhältniss zur Länge kleine Biegungen richtig. Sonst lautet er

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{3\,\Pi L \cos\beta}{E D^3 B},$$

wo β der Winkel der Linie vom tiefsten Punkt nach dem, wo das Stäbchen aufliegt, mit der Horizontalen ist; es ist also der Krümmungsradius bei sehr grossen Biegungen in Wirklichkeit grösser, als er oben in Rechnung gezogen ist, und demnach die Oberflächenspannung kleiner als die gefundenen.

Dass aber die dickeren Stäbchen bei so auffällig kleineren Spannungen zerbrochen sind, liesse sich vielleicht dadurch erklären, dass bei der sehr grossen Belastung (100 bis 200 Gramm) die Schneide die Oberfläche des Stäbchens verletzt, und so ein zu zeitiges Brechen bewirkt.

Im Allgemeinen ist aber das zu frühe Brechen, namentlich wenn es ein wenig seitlich des Belastungspunkts geschieht, durch die Annahme von Unregelmässigkeiten im Kristall zu erklären.

Schwieriger ist zu erklären, dass nach der 3. Bemerkung die Stäbchen, die nach 2 Würfelflächen brechen, vorher ein bedeutend grösseres Gewicht getragen hatten, als nach den übrigen Messungen zu erwarten stand. Ich kann nur die Vermuthung aussprechen, dass dabei ein in entfernt ähnlicher Weise anormaler Zustand ein-

getreten ist, wie in Flüssigkeiten beim Abkühlen bis unter den Gefrierpunkt, ohne dass ein Gefrieren stattgefunden hat. Der Zustand ist ein labiler, dafür sprechen folgende Bemerkungen: 1. Das Brechen erfolgt nicht augenblicklich, wenn der Punkt erreicht ist, sondern (und das wurde bei den Rückstandsbeobachtungen bemerkt) eine kleine Zeit, ja bis 3 Minuten nach Abschliessung des Zuflusses, ohne irgend eine merkliche Ursache.

2. Das Brechen erfolgt mit viel grösserer Gewalt als in andern Fällen, die Bruchstücke sind oft aus dem Zwischenraum der Schneiden hinausgeschleudert worden, was sonst nie geschah.

Dies nur zur Begründung meiner Willkür, sowohl jene beiläufig gefundenen Werthe von $1 : \overline{\delta}$ (die sich beim Biegen mittelst der Schraube ergaben), so wie alle die, wo das Stäbchen in 3 Stücke zersprungen ist, von der Berechnung auszuschliessen.

Dann erhalte ich für die 6 Gattungen von Stäbchen

W.	$1 : \overline{\delta} = 2830.$	**Pw.** $11^1/_4{}^0$	$1 : \overline{\delta} = 2000.$
Gr.	$= 1300.$ (?)	$22^1/_2{}^0$	$= 2000.$
O.	$= 1170.$	$33^3/_4{}^0$	$= 1400.$

Nun sind aber die Elasticitätscoefficienten, d. h. die Gewichte, die einen Stab vom Querschnitt $= 1$ □^{mm} aufs doppelte ausdehnen, und darum werden nach ihren oben gefundenen Werthen die Gewichte, welche das Zerreissen eines solchen Stabes bewirken, ungefähr

W.	$\overline{p} = 740$ Gr.	$= 44$ Lth.	
Gr.	$\overline{p} = 1350$ Gr.	$= 81$ Lth.	(?)
O.	$\overline{p} = 1400$ Gr.	$= 84$ Lth.	
Pw.	$(11^1/_4{}^0)\ \overline{p} = 1000$ Gr.	$= 60$ Lth.	
	$(22^1/_2{}^0)\ \overline{p} = 930$ Gr.	$= 56$ Lth.	
	$(33^3/_4{}^0)\ \overline{p} = 1250$ Gr.	$= 75$ Lth.	

Mit den erstern 3 sind zu vergleichen die Resultate von Herrn Prof. Sohnke

W.	$\overline{p} = 35$	Lth.
Gr.	$\overline{p} = 70$	Lth.
O.	$\overline{p} = 75$	Lth.

Dass die von mir gefundenen absoluten Werthe durchweg grösser sind als die Sohnke'schen erklärt sich wohl zum Theil dadurch, dass meine Belastungsart durch zufliessend Wasser die Erschütterungen vermied, die das Hinzuschütten von Schrot wohl nothwendig hervorgebracht haben wird.

Uebereinstimmend sind die beiden Versuchsreihen hauptsächlich darin, dass sie der Annahme widersprechen, dass das Zerreissen stets geschähe, wenn die Kraftcomponente normal zu den Blätterdurchgängen (d. i. den Würfelflächen) eine bestimmte Grösse erlangt hätte. Denn dann müsste, wie Herr Prof. Sohnke gezeigt hat,

$$\overline{p_o} = 3\overline{p_w}$$

sein, und während in den Sohnke'schen Zahlenangaben gerade für die Gattung **O.** die grösste Unsicherheit ist, stimmen die meinigen darin sehr gut überein, dass diese Relation unmöglich erfüllt sein kann. Dass $\overline{p}_g = 2p_w$ sein soll, stimmt hier leidlich, bei Herrn Prof. Sohnke absolut.

Herr Prof. Sohnke stellt die Vermuthung auf, es könnte beim Zerreissen eine Componente in der Würfelfläche neben der normal zu derselben wirksam werden. Ich habe den Gegenstand untersucht und gefunden, dass eine durch beide Componenten zugleich hervorgebrachte Zerreissung unmöglich ist, hingegen denkbar, dass für eine Anzahl von Richtungen nur die eine, für eine andere nur die andere die Trennung verursacht. Dies aber nicht aus den gefundenen Zahlen, denn mit derartigen liesse sich Nichts beweisen, sondern durch eine einfache theoretische Betrachtung.

Es wirke, auf die Flächeneinheit bezogen, normal zum Blätterdurchgange die Kraft N und bringe die Dilatation NC hervor; es wirke in demselben P und verursache die Dilatation PC, so ist die Dilatation, die durch eine Kraft Π in der Richtung a ausgeübt wird

$$\Delta_a = \Pi \sqrt{C^2 \cos^4\varphi + C_1{}^2 \sin^2\varphi \,.\, \cos^2\varphi};$$

wo φ den Winkel der Richtung a gegen die Normale der Spaltungsebene bezeichnet.

Nimmt man nun an, das Zerreissen erfolgt, wenn die Dilatation Δ_a einen bestimmten Werth $\overline{\Delta}_a$ angenommen hat, so kann derselbe in jeder Richtung im Kristall bei einer andern Belastung $\overline{\Pi}_a$ erreicht sein. Wendet man die Formel für die 3 Hauptrichtungen **W.**, **Gr.** und **O.** an, so folgt:

$$\overline{\Delta}_w = \overline{\Pi}_w C$$

$$\overline{\Delta}_g = \overline{\Pi}_g \cdot \frac{1}{2} \sqrt{C^2 + C_1{}^2}$$

$$\overline{\Delta}_o = \overline{\Pi}_o \cdot \frac{1}{3} \sqrt{C^2 + 2C_1{}^2}$$

Eliminirt man C und C_1, so erhält man eine Relation zwischen

$$\left(\frac{\overline{\Delta}}{\overline{\Pi}_w}\right), \left(\frac{\overline{\Delta}}{\overline{\Pi}_g}\right) \text{ und } \left(\frac{\overline{\Delta}}{\overline{\Pi}_o}\right).$$

Diese 3 Grössen sind aber der bestimmten Richtung im Kristalle eigenthümliche Constanten, nämlich ihre reciproken Elasticitätscoefficienten. Damit also die gleichzeitige Wirkung beider Kräftecomponenten ein Zerreissen hervorbringen kann, müssen die reciproken Elasticitätscoefficienten die sich hier ergebende Relation erfüllen:

$$\left(\frac{1}{E_w}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{E_o}\right)^2 = 8\left(\frac{1}{E_g}\right)^2.$$

Nun zeigt aber die von Herrn Geheimrath Neumann angegebene Formel für die Elasticitätscoefficienten, dass diese selben 3 Grössen auch genügen sollen der Gleichung

$$\frac{1}{E_w} + 3\frac{1}{E_o} = 4\frac{1}{E_g}.$$

Beide Gleichungen können nicht zusammen bestehen, die letztere ist aber sicher richtig, darum kann die Annahme nicht richtig sein, dass das Zerreissen durch die

Componente parallel und normal zur Würfelfläche zugleich hervorgebracht wird.

Dagegen steht principiell der Vermuthung, dass für gewisse Richtungen, nämlich für alle, für die φ zwischen o und einem dem Medium individuellen Winkel φ_1 liegt, das Zerreissen nur durch die Compenente normal zu der Würfelfläche hervorgebracht wird, und für die Richtungen mit grösserem φ allein durch die in der Würfelfläche, nichts entgegen. Das Phänomen würde dann zwar von denselben 2 Constanten C und C_1 abhängig, diese kämen aber in keinem Ausdruck zugleich vor, und gehorchten darum auch keiner allgemeinen Relation. Es würde dann für die erste Gattung von Stäbchen das Zerreissungsgewicht sein

$$\Pi_1 = \frac{\overline{N}}{\cos^2 \varphi}$$

und für die letzteren

$$\Pi_2 = \frac{\overline{P}}{\cos \varphi \sin \varphi},$$

wo $\overline{N}$ und $\overline{P}$ die auf die Flächeneinheit bezogenen Gewichte sind, die resp. normal oder parallel zur Würfelfläche wirkend das Zerreissen hervorbringen würden.

Unter der Einführung dieser Annahme sind die Sohnke'schen Beobachtungen selbstverständlich erklärbar, da dazu noch eine Constante verfügbar wird. Eigenthümlich ist, dass sich aus diesen Beobachtungen $\overline{P} = \overline{N} = 35$ Lth. ergeben würde.

Ich habe durch recht gut stimmende Beobachtungen $\overline{\Pi}_o = 84$ Lth. gefunden, daraus würde folgen $\overline{P} = 39{,}4$ Lth. während $\overline{N} = 44$ Lth. direct beobachtet war.

Die Beobachtungen von **W. Pw.** $22\frac{1}{2}^0$ und **Pw.** $33\frac{3}{4}^0$, die allein von Belang sind, geben zusammen berechnet:

$N = 46$ Lth. und daraus

rückwärts bestimmt

$\overline{\Pi}_w = 46$ Lth. $\overline{\Pi}_{22\frac{1}{2}^0} = 64$ Lth. $\overline{\Pi}_{33\frac{3}{4}^0} = 67$ Lth.,

wogegen beobachtet sind

44 Lth. 56 Lth. 75 Lth.

Dies dürfte die ausgesprochene Vermuthung über den Vorgang weder bestätigen noch widerlegen.

Die Entscheidung, ob dieselbe beizubehalten wäre, liegt in der Untersuchung einer Richtung des Kristalles, die sich zwischen **O.** und **Gr.** befindet.

ANHANG II.

Die Bestimmung der Dimensionen der beobachteten Stäbchen.

Die in Rechnung gezogene Länge der beobachteten Stäbchen ist die senkrechte Entfernung der beiden Schneiden, auf denen dieselben liegen. Diese Entfernung bestimmte ich für alle Beobachtungen der II. und III. Serie im Voraus, indem ich die in I, § 6 erwähnten Metallbleche nach dem Normalmeter auf dem Königsberger Aichamt auf die Länge von 50 und 63^{mm} brachte, (für die kürzeren und längeren Stäbchen). Diese 2 Längen waren gewählt, weil sie, ausser dass sie den wirklichen Längen der Stäbchen recht gut entsprachen, die Eigenschaft haben, dass bis auf 0,0002 genau

$$50^3 = \frac{63^3}{2}$$

ist, was die Vergleichung der den Stäbchen von verschiedener Länge entsprechenden Biegungen erleichterte.

Nur bei der Untersuchung der Tragfähigkeit wurden kleinere Distanzen der beiden Schneiden benutzt und diese dann auf der Theilung abgelesen, die auf der Schiene, längs deren sich die Schneiden verschieben lassen, angebracht ist. [Dasselbe geschah bei den Beobachtungen der I. Serie.]

Die Bestimmung der Dicke und Breite der Stäbchen, d. h. die Messungen derselben zur Berechnung derjenigen lineären Functionen, welche die Gestalt der Stäbchen am genährtesten wiedergeben, geschah in folgender Weise.

Da die Kanten der Stäbchen beim Schleifen nicht völlig rein zu erhalten waren, sondern stets, entweder durch eine sehr geringe Auflösung oder durch Ansetzen von kleinen Salzkörnchen aus der beim Schleifen benutzten Lösung verändert wurden, so war es nicht thunlich, die Breite der Flächen der Stäbchen zur Bestimmung der Dimensionen zu messen. Statt dessen führte ich, gemäss dem Vorschlag meines verehrten Lehrers, Geheimrath Neumann, gegen das, wie in Figur 28 angedeutet, an eine feste Widerlage gelegte Stäbchen ss ein Messinglineal ll heran, das einige Theilstriche trug, auf welche dasselbe Mikroscop, das zur Messung der Biegungen diente, eingestellt war. Die in Fig. 27 dargestellte Vorrichtung ist die bei der III. Serie Messungen benutzte, bei der das Stäbchen nie der freien Luft ausgesetzt werden durfte, und demgemäss auch seine Dimensionen bestimmt wurden, während es sich unter Terpentinöl befand.

Indem einmal das Lineal ll bis an die feste Widerlage und dann gegen das Stäbchen geführt wurde, liess sich mit Genauigkeit die Dicke und Breite an derselben Stelle bestimmen. Wiederholte Beobachtungen differirten selten um 1 oder 2 Trommeltheile der Mikrometerschraube ($= \frac{1}{800}^{mm}$), zumal seitdem ich das an das Stäbchen herangeschobene Ende des Lineals mit einer kleinen festgekitteten Salzplatte bedeckte und so ver-

hinderte, dass sich nach und nach eine Vertiefung in der festen Widerlage bildete. Mit dieser Vorrichtung wurde die Dicke der längeren Gattung Stäbchen an 7, der kürzeren an 5 gleich weit von einander entfernten Punkten gemessen, darnach die vorher obere Fläche des Stäbchens nach unten gelegt, und die Messungen wiederholt. Die Mittelwerthe aus ihnen setzte ich gleich den in der Mittellängslinie stattfindenden Dimensionen und berechnete aus ihnen nach der Methode der kleinsten Quadrate die 2 lineären Functionen für die 2 Hälften des Stäbchens.

Ein Beispiel für diese Operation mag sein die Bestimmung der Gestalt des Stäbchens: 0°, 90°, 90° No. I.

Die Dicken für die Mittellängslinie sind:

660,6; 670,0; 690,6; 708,6; 722,6; 735,2; 737,5.

Bei der Berechnung der Dimensionen der Stäbchen aus der I. und II. Serie wandte ich das Schema an:

$$D_m = 708{,}6 \qquad \Delta_m = 708{,}6$$

$$\frac{aL}{6} + D_m = 690{,}6 \qquad \frac{aL}{6} + \Delta_m = 722{,}6$$

$$\frac{2aL}{6} + D_m = 670{,}0 \qquad \frac{2aL}{6} + \Delta_m = 735{,}2$$

$$\frac{3aL}{6} + D_m = 660{,}0 \qquad \frac{3aL}{6} + \Delta_m = 737{,}5$$

$$\frac{aL}{6} = -16{,}6 \qquad \frac{aL}{6} = +9{,}9$$

$$D_m = 707{,}2 \qquad \Delta_m = 711$$

$$D = \frac{1}{2}\left[\left(D_m + \frac{aL}{4}\right) + \left(\Delta_m + \frac{aL}{4}\right)\right]$$

$$= 704{,}2.$$

Dabei ergaben sich, wie früher (I, § 3) erwähnt, die Dicken der beiden Keile im Punkte, wo sie zusammenstossen, etwas verschieden, und auch verschieden von dem direct gemessenen Werth.

Weil aber, wie damals erörtert, der Einfluss der Dicke an der Stelle der Belastung am grössten ist, habe ich die Dimensionen für die II. Serie ein zweites Mal, und ausserdem die der III. Serie nach folgendem Schema berechnet:

$$\frac{aL}{6} = -18{,}0 \qquad \frac{aL}{6} = 14{,}0$$

$$\frac{2aL}{6} = -38{,}6 \qquad \frac{2aL}{6} = 26{,}6$$

$$\frac{3aL}{6} = -48{,}6 \qquad \frac{3aL}{6} = 28{,}9$$

$$\frac{aL}{6} = -17{,}5 \qquad \frac{aL}{6} = 11{,}6$$

$$D_m = 708{,}6$$

$$D = 704{,}2.$$

Die Breite wurde nur an 3 verschiedenen Stellen des Stäbchens, an den Enden und in der Mitte, gemessen, und zwar in beiden Lagen desselben. Aus den mittleren Werthen

4134; 4152; 4172

folgt nach dem Schema

$$\frac{bL}{2} = -18 \qquad B_m = 4152$$

$$-\frac{bL}{2} = +20$$

$$\frac{bL}{2} = -19 \qquad B = 4150$$

Die Entfernung des Belastungspunktes vom Mittelpunkt der Stäbchen ist in der II. und III. Serie unter Benutzung der nach der ersten Berechnungsmethode für die Dicke gefundenen Werthe $\frac{aL}{6}$ und $\frac{aL}{6}$ bestimmt, während bei der Berechnung des Elasticitätscoefficienten die zweite angewandt worden ist; da $\frac{AL}{2}$ aber nur ein unbedeutendes Correctionsglied ist, so ist das ohne Bedenken.

ANHANG III.

Ueber die Herstellung der zu den Beobachtungen verwandten Stäbchen aus Steinsalz.

I. Da das Ausschneiden der dünnen Säulchen aus den grösseren kristallinischen Stücken Steinsalz mit einer von der Hand geführten Säge in jedem Falle höchst zeitraubend und, falls ich mich nicht darauf beschränkte, dieselben dicker als $^1/_2$ Linie anzufertigen und erst durch langwieriges Schleifen auf die beabsichtigte Grösse zu reduciren, auch gefährlich und verlustreich gewesen wäre (— wie solches die Erfahrung gelehrt hatte —), so construirte ich mir eine kleine Vorrichtung, mittelst deren das Sägen mit grosser Sicherheit in hinreichend kurzer Zeit bewerkstelligt wurde.

Vorbild war mir dabei die Einrichtung der gewöhnlichen Brettschneidemühlen: in diesen wird die Säge senkrecht auf und nieder geführt und der Balken gegen sie hin bewegt; ebenso liess ich die in einem stählernen Rahmen ausgespannte Säge AA (Fig. 26) von einem starken Uhrwerk zwischen 2 messingenen Schienen ss vertical in der Secunde etwa 1 Mal auf und ab bewegen und den auf einen Schlitten (S) gekitteten Kristall durch ein Gewicht (P) auf Schienen gegen die Säge gezogen werden. Dies Gewicht war je nach Umständen verschieden, — am kleinsten beim Beginn und beim Voll-

enden jedes Schnittes, wo die Gefahr des Splitterns am grössten ist.

Zwei Punkte waren es, die mich veranlassten, von dem Vorbild abzuweichen, die beide in der Geringfügigkeit der verfügbaren Kraft ihren Grund haben.

Um die Reibung möglichst gering zu machen und die unvermeidliche auf alle Elemente der durchschrittenen Bahn gleichmässig zu vertheilen, war zunächst die aufrechte Stellung der Säge gewählt, wodurch ihr Gewicht auf die Reibung in den Schienen keinen Einfluss hat, und war ferner dieses Gewicht durch ein am Balancier *bb* befestigtes Gegengewicht *Q* compensirt, so dass nun auch die Reibung im Lager des Triebes *T* vermindert war. Um aber den bedeutendsten Widerstand, den die Säge im Kristall findet, auf die ganze Bewegung gleichmässig zu vertheilen, gab ich ihr Zähne, die nach beiden Seiten hin wirken konnten, wie in Fig 32 a. angedeutet, — oder da das Schärfen bei dieser Einrichtung nicht ohne Schwierigkeit ist, solche, die auf der ganzen einen Hälfte der Säge nach oben, auf der andern nach unten geschärft waren. Die Richtung war so gewählt, wie in Fig. 32 b., damit beiderseitig aus dem Kristall hinaus, nicht in ihn hinein gesägt wurde. Um die Reibung im Kristall zu vermindern, floss unausgesetzt concentrirte Salzlösung am Sägeblatt hinab.

Der zweite durch die bisher erwähnten Einrichtungen noch nicht geordnete Punkt ist die Ungleichmässigkeit der Bewegung, die sich zeigte, wenn die Säge den höchsten und tiefsten Punkt erreicht hatte. Sie rührte davon her, dass bei dem momentanen Stillestehen der Säge in jenen Punkten die Reibung im Kristall verschwindet, sodass nun das Trieb *T* sich plötzlich mit lebhafterer Geschwindigkeit drehen kann. Die balancirte Säge folgte dieser Beschleunigung, bis die wieder eintretende Reibung einen Widerstand leistet, der sich in einem heftigen Ruck äussert, welchen das Trieb *T* erhält. Dieser musste, um Kraft zu sparen und die Stäbchen vor dem Brechen zu wahren, abgestellt werden. Ich benutzte zu diesem Zwecke ein schweres Pendel, das mit dem Balancier verbunden wurde und das Sägegestell in seinem ruhigen Gang auch in den zwei erwähnten Stellen erhielt. Unter welchen Bedingungen die der Säge durch dasselbe mitgetheilte Geschwindigkeit mit der von dem Uhrwerk ertheilten an jeder Stelle der Bahn gleich ist, so dass also das Pendel nicht hemmend und störend eingreift, erkannte ich durch folgende Betrachtung (s. Fig. 30):

Es sei $\frac{d\varphi}{d\,t}$ die Winkelgeschwindigkeit, die dem Trieb *T* durch das Uhrwerk mitgetheilt ist. Die Triebstange, deren Länge $= L$, sei in dem Abstand r von der Axe angebracht. Der Winkel φ wird wie in der Figur gezählt. Für $\varphi = \varphi$ sei der Punkt p um $x \doteqdot \frac{r^2}{L}$ von der Stelle entfernt, wo er sich für $\varphi = 0$ befindet. Dann erhält man den Werth der dem Punkte p ertheilten Geschwindigkeit:

$$\frac{dx}{dt} = r\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}\left(1+\frac{r\sin\varphi}{\sqrt{L^2-r^2}}\right).$$

Hiermit vergleiche ich die durch das Pendel hervorgebrachte Geschwindigkeit. (Siehe Fig. 29.)

Die Länge des Pendels sei Λ. Der Punkt p hängt an einem Faden, der sich von einem mit dem Radius l beschriebenen Kreissegment *bb* abwickelt; sein x ist $= 0$, wenn das Pendel in Ruhe ist. Daher ist seine Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = l\frac{d\Psi}{dt} = \sqrt{\frac{2lg}{\lambda}(\cos\Psi - \cos\Psi_o)}$$

Drückt man diese beiden Werthe in x aus, so kann man sie auf dieselbe Form bringen, wenn man annimmt, dass l und L gross gegen r sei, sodass $\frac{r}{L}$ und $\left(\frac{x}{l}\right)^2$ gegen 1 vernachlässigt werden kann. Dann lauten sie resp.

$$r\frac{d\varphi}{dt}\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}} \text{ und } r \doteqdot \sqrt{\frac{g}{\lambda}}\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}.$$

Die erste Bedingung ist practisch kaum zu erfüllen; dadurch wird aber die Ruhe der Bewegung nicht merklich gestört. Das im ersten Ausdruck vernachlässigte Glied unter der Wurzel lautet $\frac{+2x}{\sqrt{L^2-r^2}}$

Es ist nur von Belang an dem höchsten und tiefsten Punkte, den p erreicht. An diesem wurde aber immer der ruhige Gang durch die plötzlich schneller werdende Bewegung des Triebes *T* gestört; es ist daher vortheilhaft, dass gerade an jenen Stellen das Pendel ritardirend wirkt.

Die Dimensionen waren bei dem von mir benutzten Sägeapparat, den Fig. 31 vollständig zeigt, die folgenden

$$r = 1{,}2\ cm \quad l = 16\ cm$$
$$L = 15\ cm \quad \lambda = 45\ cm.$$

Die Pendellinse war eine über 6 *Kl.* schwere Bleimasse.

II. Das Schleifen der in der besprochenen Weise aus den Kristallen geschnittenen Stäbchen bis zur beabsichtigten Dicke von $\frac{1}{4}$ — $1^{mm.}$ geschah auf einer matten Glasplatte und in concentrirter Salzlösung, der ich beim Beginn eines jeden Stäbchens nach Gutdünken einige Tropfen Wassers zusetzte, um das Hinwegnehmen der gröbsten Unebenheiten zu beschleunigen. Auch hier liess ich an die Stelle der Hand, die das Stäbchen bewegte, bald eine kleine Vorrichtung treten, die durch das erwähnte kräftige Uhrwerk getrieben wurde; und

zwar aus folgenden Ursachen. Einmal ist die Gefahr des Zerbrechens nicht unbedeutend, und um so mehr, je müder die Hand durch langes Schleifen geworden ist; andererseits aber, und dies ist das Wichtigste, drückt man beim Schleifen mit der Hand unwillkürlich heftiger auf den in der Richtung der Bewegung liegenden Theil und schleift auf diese Weise nach den Kanten hin die Ebenen rundlich ab, hauptsächlich in der Längsrichtung; endlich aber gewährte eine mechanische Vorrichtung eine Zeitersparniss.

Bei der Construction dieser Schleifvorrichtung war der leitende Gesichtspunkt der, dass, um die Bewegung durch die Hand zu ersetzen, ein jeder Punkt des Stäbchens in einem Kreise bewegt werden muss, während dieses sich selbst immer parallel bleibt. Dies erreichte ich, indem ich 2 Punkten einer Messingplatte, an der das Stäbchen befestigt war, diese Bewegung mittheilte.

Diese Platte (siehe Fig. 34 und 35) trägt nämlich auf ihrer obern Seite 2 verticale Stahlstifte s in einer gegenseitigen Entfernung $= E$; über ihr bewegen sich um verticale Axen 2 gleichgrosse Rollen RR, deren Centra gegenseitig ebenfalls um E abstehen. In gleichen Entfernungen von den Centren sind in dieselben Löcher gebohrt, und in ein Paar von ihnen werden die 2 Stahlstifte der Schleifplatte gesteckt. Eine Schnur dreht beider Rollen in derselben Richtung und Geschwindigkeit, und diese wiederum führen die Schleifplatte mittelst der Stahlstifte in der verlangten Weise herum: ein jeder Punkt beschreibt einen Kreis, während die Platte sich selbst parallel bleibt.

Es ist nöthig, noch mit einigen Worten die Einrichtung der Schleifplatte (Fig. 34) zu erklären, die auf ihrer untern Seite das Salzstäbchen trägt. Das Stäbchen ist auf eine kleine Spiegelglasplatte gekittet, und diese in eine dazu auf der untern Seite der Schleifplatte angebrachte Fassung geschoben. Die Schleifplatte ruht durch dasselbe an einer Stelle auf der unterliegenden matt geschliffenen Glasplatte; — um parallel derselben hingeführt zu werden, muss sie noch an 2 Punkten unterstützt werden. Diese Unterstützungen bestimmen im Wesentlichen die Dicke, bis auf welche das Stäbchen abgeschliffen werden kann, darum mussten sie während des Schleifens möglichst unverändert bleiben, und ausserdem verstellbar sein.

Ich wählte zuerst 2 kleine abgerundete glasharte Stahlscheiben $\sigma\sigma$, später, weil es sich brauchbarer zeigte, Messingscheibchen, die durch Schraube (a) und Feder (b) beliebig hoch und tief zu stellen sind. [Die matte Glasplatte liess ich zur Hälfte blank und dann die Schleifplatte so darüber kreisen, dass das Stäbchen immer auf der matten, die Messingscheibchen auf der blanken Hälfte und zwar in reichlichem Oel gingen, damit sie sich während des Schleifens eines jeden Stäbchens möglichst wenig abnutzen. Die Figur 36 versucht, diese Stellung zu zeigen.] Es ruht sonach im Allgemeinen die Platte auf diesen 2 Messingplättchen und dem Salzstäbchen, das unter der in der Figur durch Punkte bezeichneten Stelle befestigt ist, und senkt sich entsprechend dem allmähligen Abschleifen hinab. Um nun zu markiren, wie weit das Stäbchen abgeschliffen werden muss, um planparallel zu sein, ist vor dem Beginn die Schraube c in der gleichen Höhe wie die Stahlplättchen $\sigma\sigma$ festgestellt und trifft auf das Spiegelglas auf, sobald das Stäbchen die beabsichtigte Dicke erreicht hat. Dieser Moment ist durch ein beginnendes scharfes, scharrendes Geräusch characterisirt, und man ist daher im Stande, genau zur richtigen Zeit das Schleifen zu unterbrechen. Die Entfernung der Schleifplatte von der matten Glasplatte wurde bei kleinen Entfernungen mit Hülfe eines zwischen beide geschobenen Fühlhebels, bei grössern mittelst eines Stahlkeiles genau regulirt.

Ich schliff immer zuerst die Breite, dann die Schmalseiten der Stäbchen. Um die ersteren während des Schleifens der letzteren vor der Verunreinigung durch eine ankristallisirte Salzschicht zu schützen, hatte ich mir paarweis gleich dicke Messingstäbchen von rechteckigem Querschnitt anfertigen lassen, zwischen welche ich die Salzstäbchen kittete, sie von überschüssigem Kitt mit Terpentinöl befreite und dann genau bis auf die sie einfassenden Messingstäbchen abschliff.

Alle Flächen wurden erst mit einer gröber, dann mit einer feiner mattirten Glasplatte geschliffen und am Ende auf über Spiegelglas ausgespannter Seide polirt.

Mittelst dieser Vorrichtung gelang es mir, auch an den dünnsten Stäbchen (z. B. **Gr.** VIII von 0,35^{mm} Dicke) die schmalen Seitenflächen anzuschleifen, ohne Scharten aus den Kanten zu brechen, — und dies, während die Maschine in schnellster Gangart das Stäbchen in der Secunde 4 bis 5 Mal Kreise von 2 bis 3 cm. im Durchmesser beschreiben liess. Ein anderes Zeichen des ruhigen und sichern Arbeitens dieser Vorrichtung ist die Thatsache, dass, während alle mit der Hand geschliffenen Stäbchen in der Mitte dicker und breiter sind als an den Enden, die mit ihrer Hülfe angefertigten zum Theil das Entgegengesetzte zeigen; es sind also die beim Schleifen mit der Hand stets auftretenden Fehler hier soweit vermieden, dass ihnen gegenüber die geringen Unebenheiten der Schleifplatte Einfluss gewinnen.

Lebenslauf.

Geboren bin ich, Woldemar Voigt, zu Leipzig den 2. September 1850. Ich bekenne den evangelischen Glauben. Die erste Schulbildung erhielt ich in dem Teichmann'schen Institut und besuchte darnach von 1859 bis 60 die Nikolaischule zu Leipzig, von da ab bis 62 das Vitzthum'sche Gymnasium in Dresden, endlich die Thomasschule in Leipzig, von der ich im Herbst 1867 mit dem Zeugniss der Reife entlassen wurde.

Unter dem Rectorat des Herrn Prof. *von Gerber* wurde ich darauf an der Leipziger Universität als Student der Naturwissenschaften immatriculirt, hörte sechs Semester hindurch die Herren Prof. *Hankel, Drobisch, Scheibner, Neumann, Kolbe, Naumann, Mayer, v. d. Mühl* und *Zöllner*, und assistirte vier Semester lang als Famulus den physikalischen Vorlesungen und Uebungen des Herrn Prof. *Hankel*.

Nach der Beendigung des Feldzuges gegen Frankreich, der mich über 2 Semester der Wissenschaft fern gehalten hatte, bezog ich die Universität Königsberg und beschäftigte mich unter der Leitung der Herren Prof. *Neumann, Richelot, Luther* in deren Collegien und Seminarien mit physikalischen und mathematischen Studien.

Sämmtlichen genannten Herren sage ich für die mir gewährte Anregung und Förderung tiefgefühlten Dank.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Thesen.

Weder die Theorie noch die Beobachtungen haben bisher endgiltig das Zahlenverhältniss der beiden Constanten festgestellt, von denen alle Elasticitätserscheinungen in unkristallinischen Medien abhängen.

Es ist zweckmässig, die Mechanik nicht auf die Statik, sondern auf die Dynamik zu basiren.

Curventafel No. I.

$W II_I$
$D = 0{,}62\ mm$
$L = 31{,}5\ mm$
$\tau = 9'$
Biegung durch die Schraube

$W II$
$D = 0{,}64\ mm$
$L = 63\ mm$
$\tau = 10'$
Belastung durch den Einsenkungsapparat

$W X$
$D = 1{,}3\ mm$
$L = 40{,}5\ mm$
$\tau = 8'$
Biegung durch die Schraube

$W II$
$D = 0{,}37\ mm$
$L = 40{,}5\ mm$
$\tau = 10'$
Biegung durch die Schraube

$W III$
$D = 0{,}77\ mm$
$L = 63\ mm$
$\tau =$ wachsend von 5' bis 15'
Belastung durch den Einsenkungsapparat.

$W VIII_I$
$D = 0{,}56\ mm$
$L = 31{,}5\ mm$
$\tau = 12'$
Biegung durch die Schraube

$W II^{200}$ aus Serie I
$D = 1{,}03\ mm$
$L = 56{,}25\ mm$
$\tau =$ wachsend von 5' bis 9'
Biegung durch die Schraube

$W VIII$
$D = 0{,}55\ mm$
$L = 63\ mm$
$\tau =$ wachsend von 5' bis 12'
Belastung durch den Zuflussapparat.

Curventafel No. II.

Pw 11¼° I

D = 0,72 mm
L = 63 mm
$\tau = \infty$

Belastung d. d. Zuflußapparat

$\bar{B}$ berechnet aus $\bar{p}$

-100 +50 0 I Biegung III 100 200 300

Pw 22½° III

D = 0,61 mm
L = 63 mm
$\tau = \infty$

Belastung d. d. Zuflußapparat

+100 +50 0 re III re I Biegung -50 re V

Pw 22½° II.

D = 0,47 mm
L = 65,3 mm
$\tau = 10'$

Biegung d. d. Schraube

+150 +100 +50 0 -50 -100 -200
I III VI V IV VII II
0 100 200 300 400 500 600 700 800

Pw 22½° IV

D = 75 mm
L = 63 mm
$\tau = \infty$

Belastung d. d. Zuflußapparat

+50 -50 -100
0 100 200
I Biegung re
II li
re
III

+700 +600 +500 +400 +300 +200 +100 0

Empirische Curven für
R
als Fct von τ

B
B=291
B=267
B=247
B=219
B=192
25
0 3' 6' τ
0 5' 10'

Curventafel № III.

Curven für R
als Fct v. τ

B=431
B=422
B=401
B=374
B=348

R
30
20
10
1' 2' 3' 4' 5' τ

Die mit ⊙ bezeichneten Punkte
entsprechen der Fct:

$$R = \frac{\bar{R}}{\bar{B}} B.e^{-n\left(e^{k\sqrt{1-\left(\frac{B}{\bar{B}}\right)^2}}-1\right)}$$

u. zw. für: $k = 3,0$
$n = 0,26$

$\bar{R}$
$\bar{B}$ ber. aus $\bar{n}$

Curven für R
als Fct. v. τ

B=383
B=364
B=353
B=329
B=313

R
30
20
10
1' 2' 3' 4' 5' τ

$\bar{B}$ ber. aus $\bar{n}$

Pw. 33¾° I
D = 0,55 mm
L = 50 mm
$\tau = \infty$
Belastung d. d. Zuflussapparat

Pw. 33¾° IV
D = 0,74 mm
L = 58,5 mm
$\tau = \infty$
Belastung d. d. Zuflussapp

Pw. 33¾° III
D = 0,63 mm
L = 67,5 mm
$\tau = 12$
Biegung d. d. Schraube

Pw. 33¾° V.
D = 0,44 mm
L = 47,25 mm
$\tau = 6'$
Biegung d. d. Schraube

I. Biegung
II Io
III
V
I
α
β

Curventafel № V.

O. II a. S. 2.

Curven für R als Fct von τ

B=450

B=388

B=291

B=571

B=556

B=518

B=486

30 20 10

1' 2' 3' 4' 5'

$\bar{B}$ berechnet aus $\bar{n}$

900 800 700 600

Die durch ⊙ bezeichneten Punkte entsprechen der Fct.

$$R = \frac{\bar{R}}{\bar{B}} B.e^{-n\left(e^{k\sqrt{1-\left(\frac{B}{\bar{B}}\right)^2}} - 1\right)}$$

u. zw. ist für O II a. S. 1. $k = 2{,}6$ $n = 0{,}306$ $\bar{R} = 498.$
S. 2. $k = 2{,}4$ $n = 0{,}379$ $\bar{R} = 1160.$

O. II. a. S. 1.

Curven für R als Fct von τ

B=693

B=664

B=616

B=571

B=502

B=415

B=315

30 20 10

1' 2' 3' 4' 5'

O. II a. S. 2.

$D = 0{,}81$ mm
$L = 30$ mm
$\tau = \infty$
Belastung durch den Zuflussapparat.

$\bar{B}$ berechnet aus $\bar{n}$

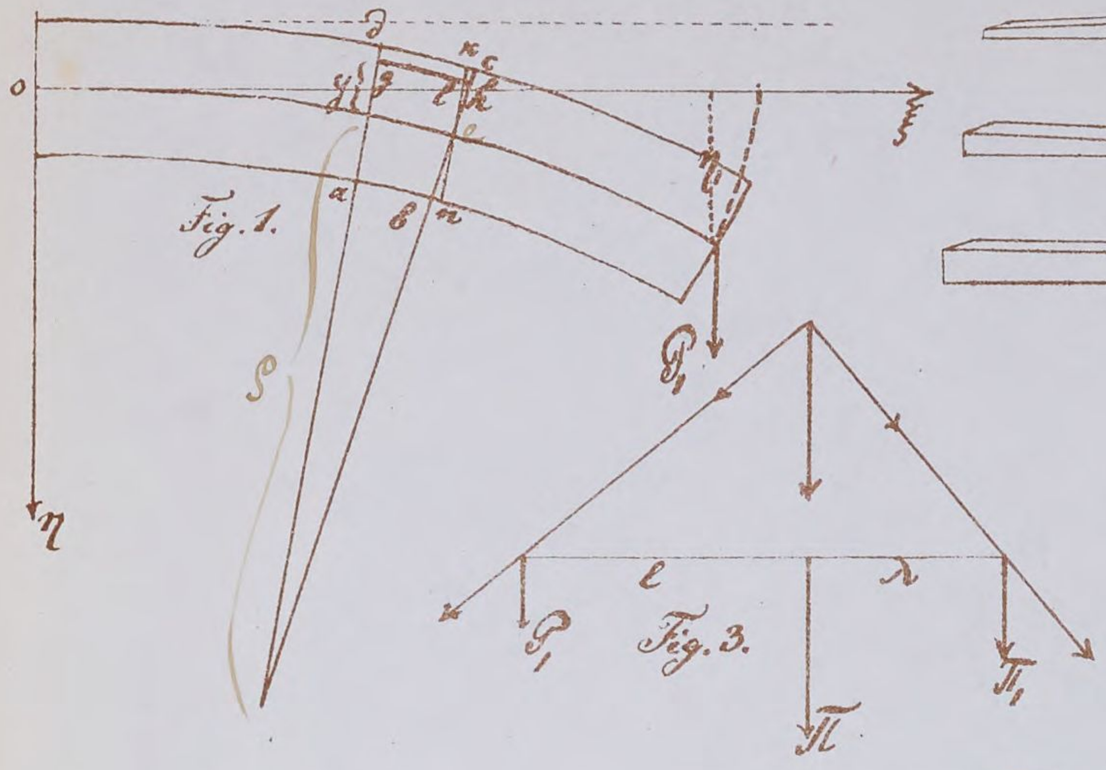
500 400 300 200 100

O. II. a. S. 1.

$D = 0{,}55$ mm
$L = 27$ mm
$\tau = \infty$
Belastung durch den Zuflussapparat

0 100 200 300 400 500 600 700

I^te Tafel,
zur Bestimmung der elastischen Biegung.



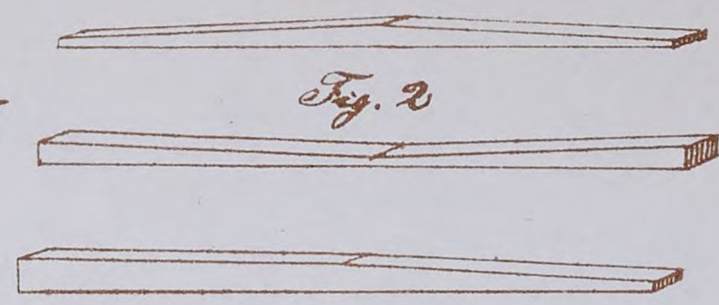


Fig. 2

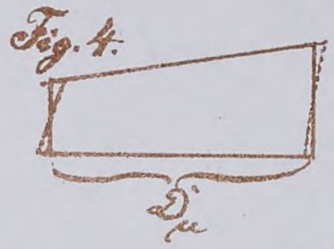


Fig. 4.

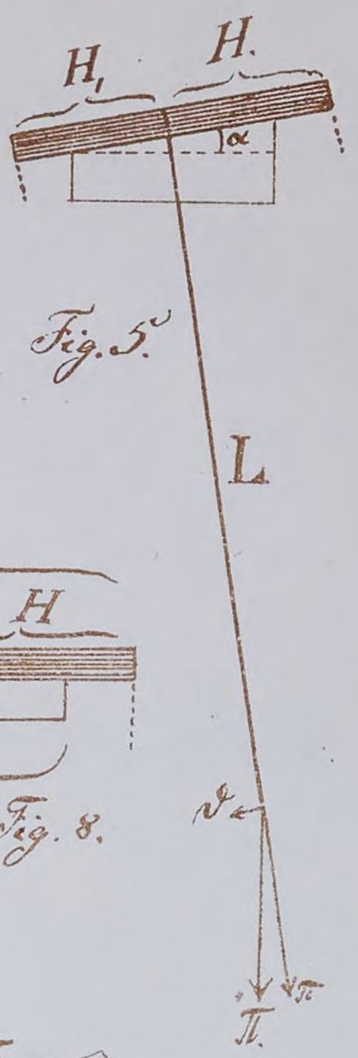


Fig. 5.

Fig. 3.

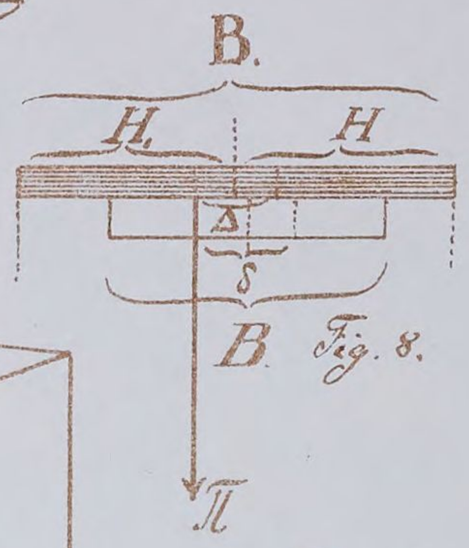
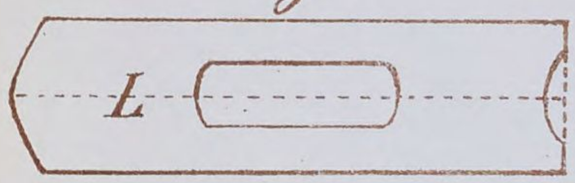


Fig. 8.

Fig. 6.



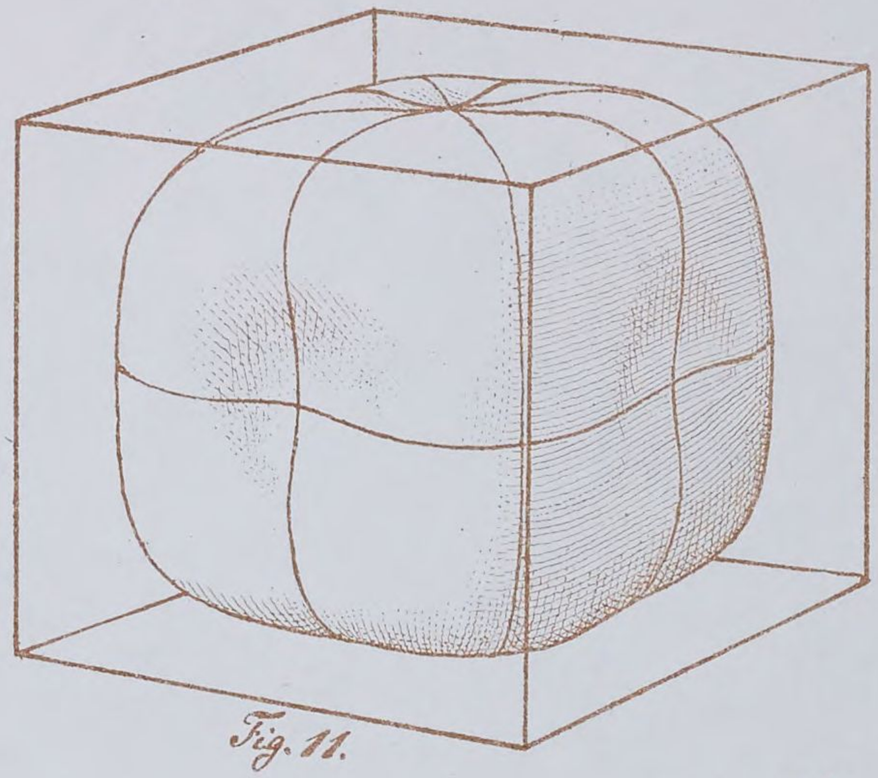


Fig. 11.

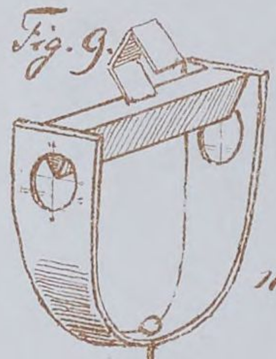


Fig. 9.

3/2 nat. Gr.

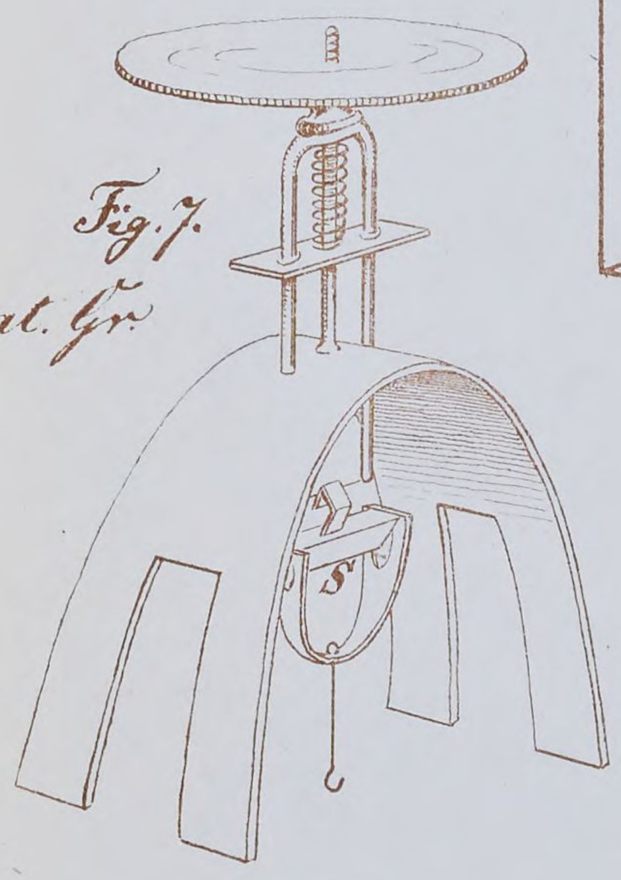


Fig. 7.
nat. Gr.

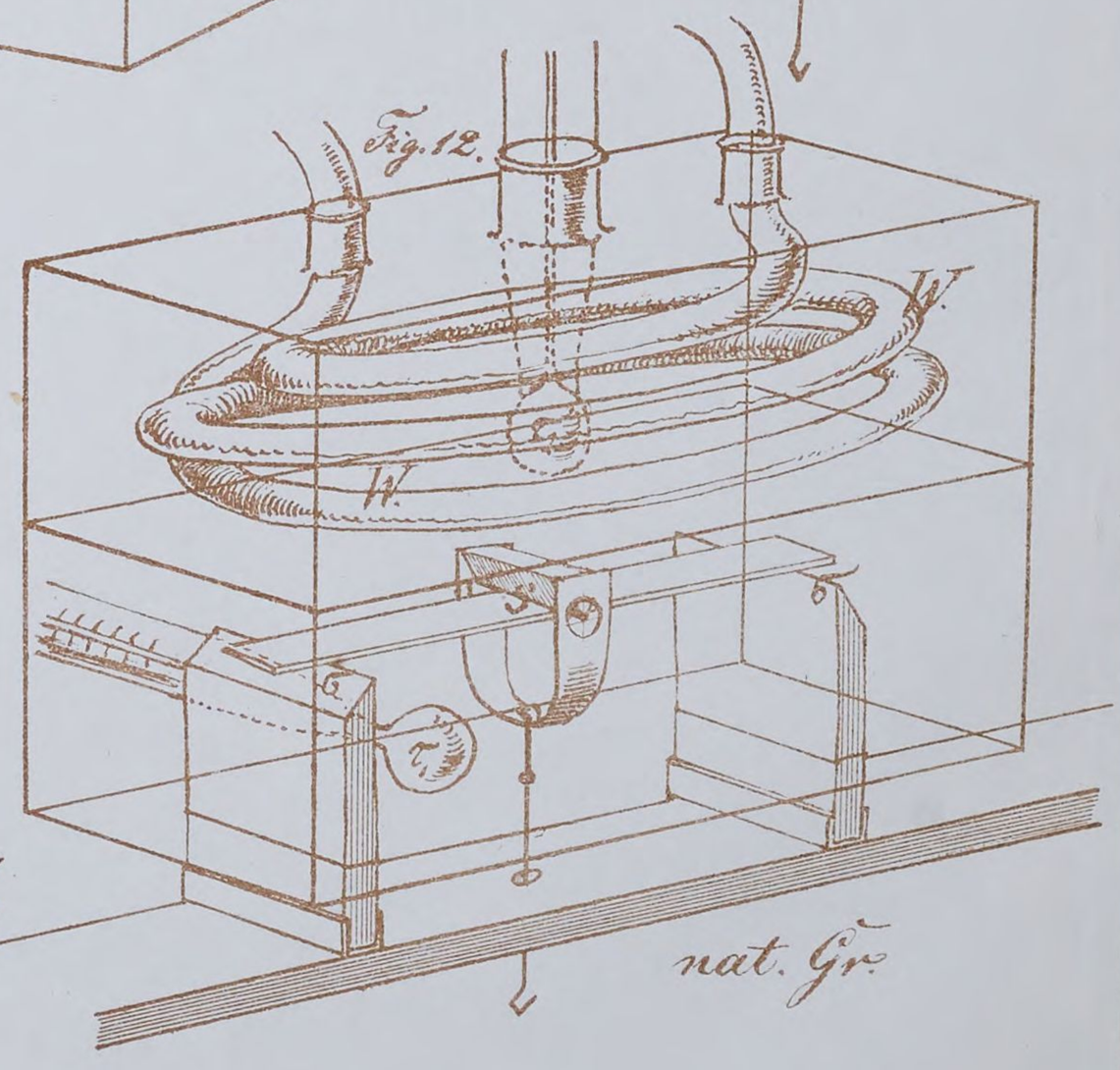


Fig. 12.
nat. Gr.

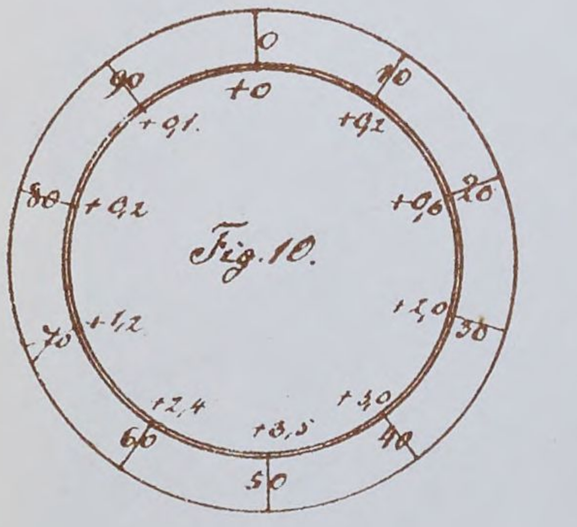


Fig. 10.

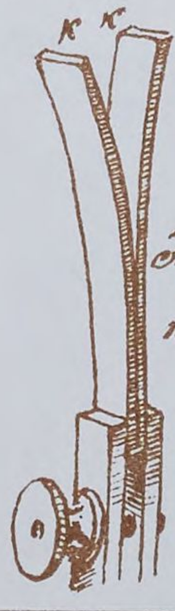


Fig. 13.
nat. Gr.

II^te Tafel
zu der Untersuchung des Rückstandes.

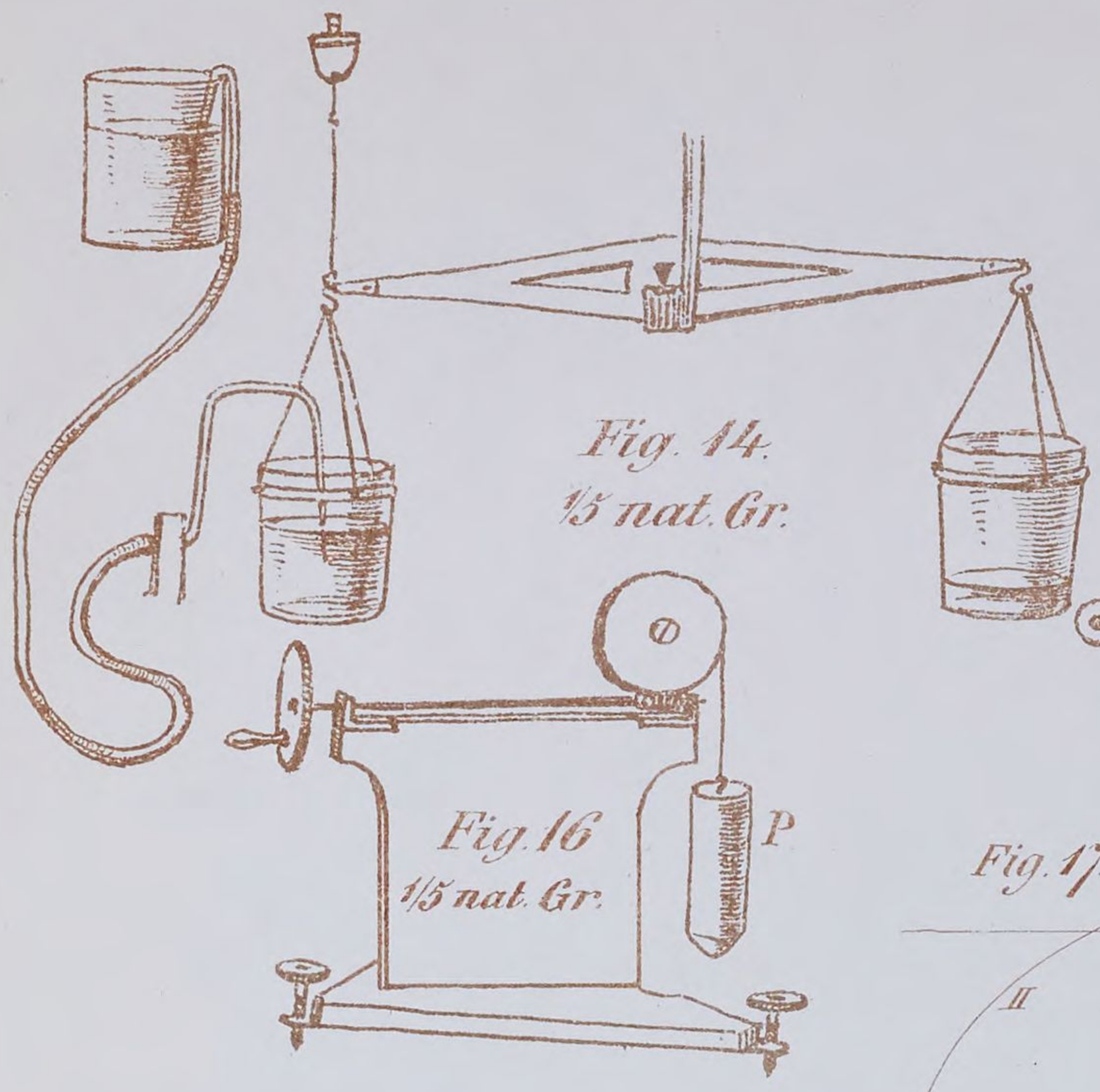


Fig. 14.
1/5 nat. Gr.

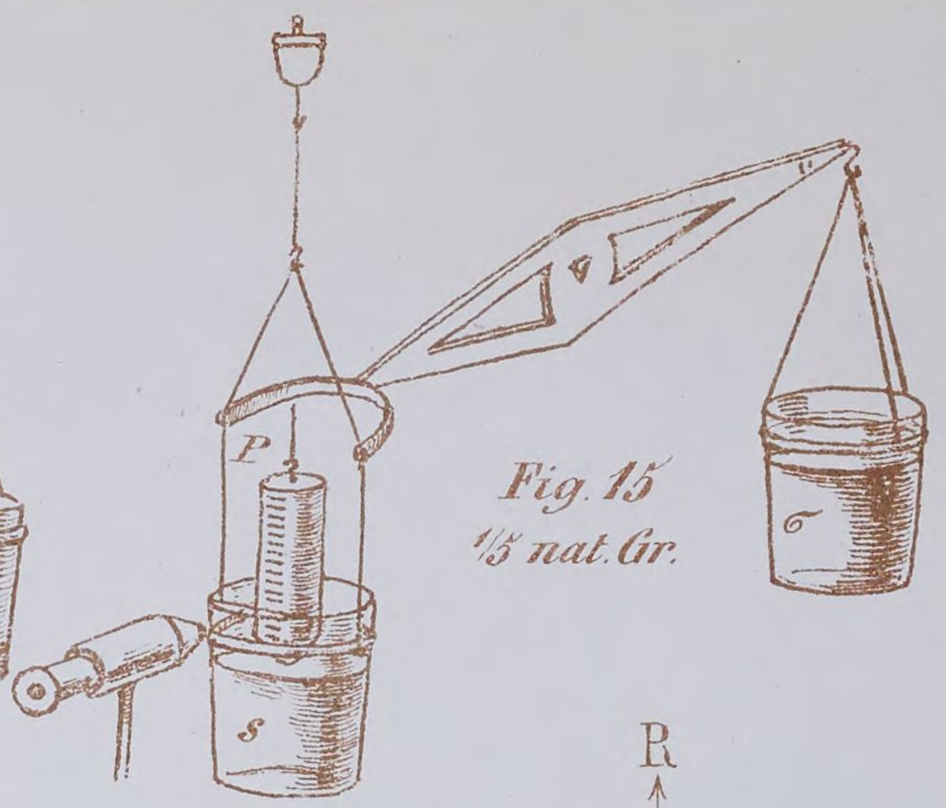


Fig. 15
1/5 nat. Gr.

Fig. 16
1/5 nat. Gr.

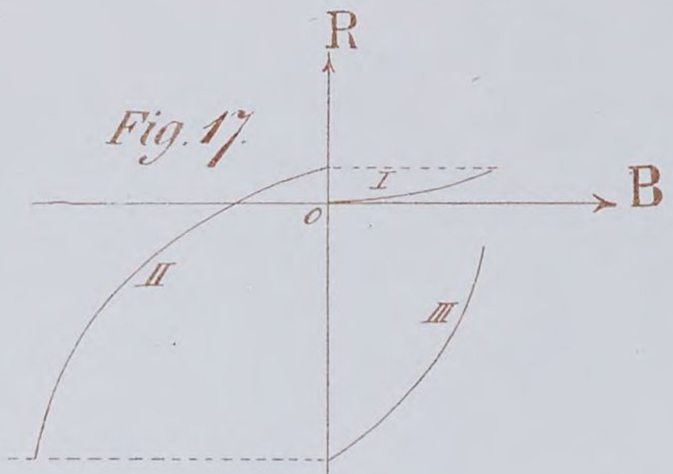


Fig. 17.

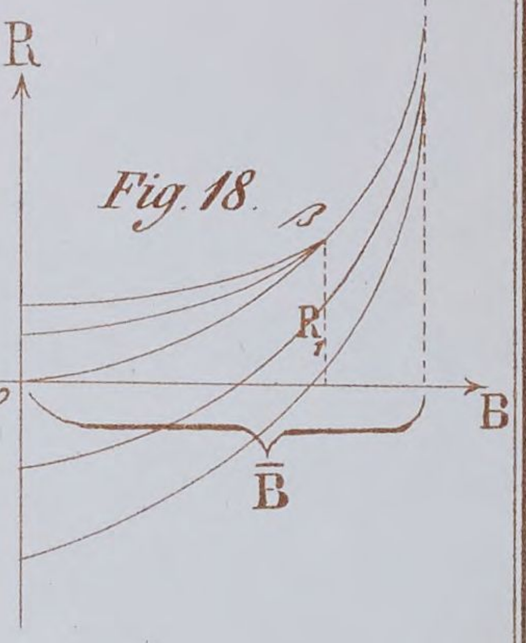


Fig. 18.

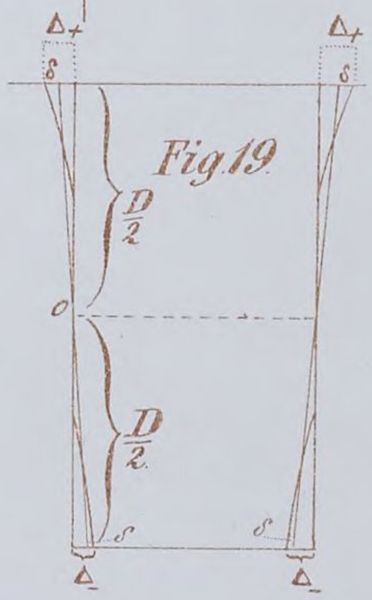


Fig. 19.

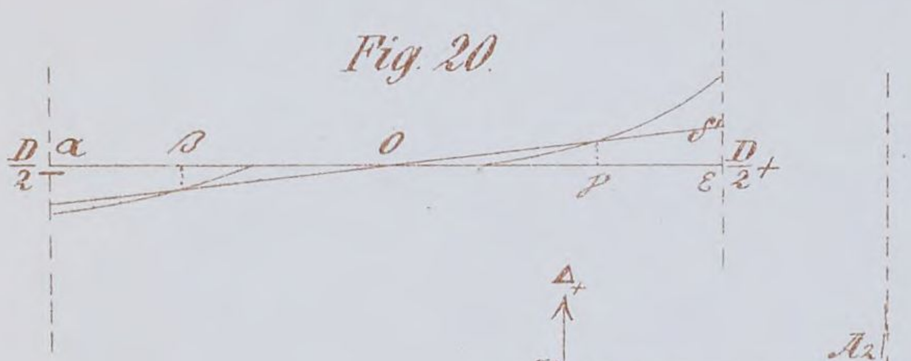


Fig. 20.

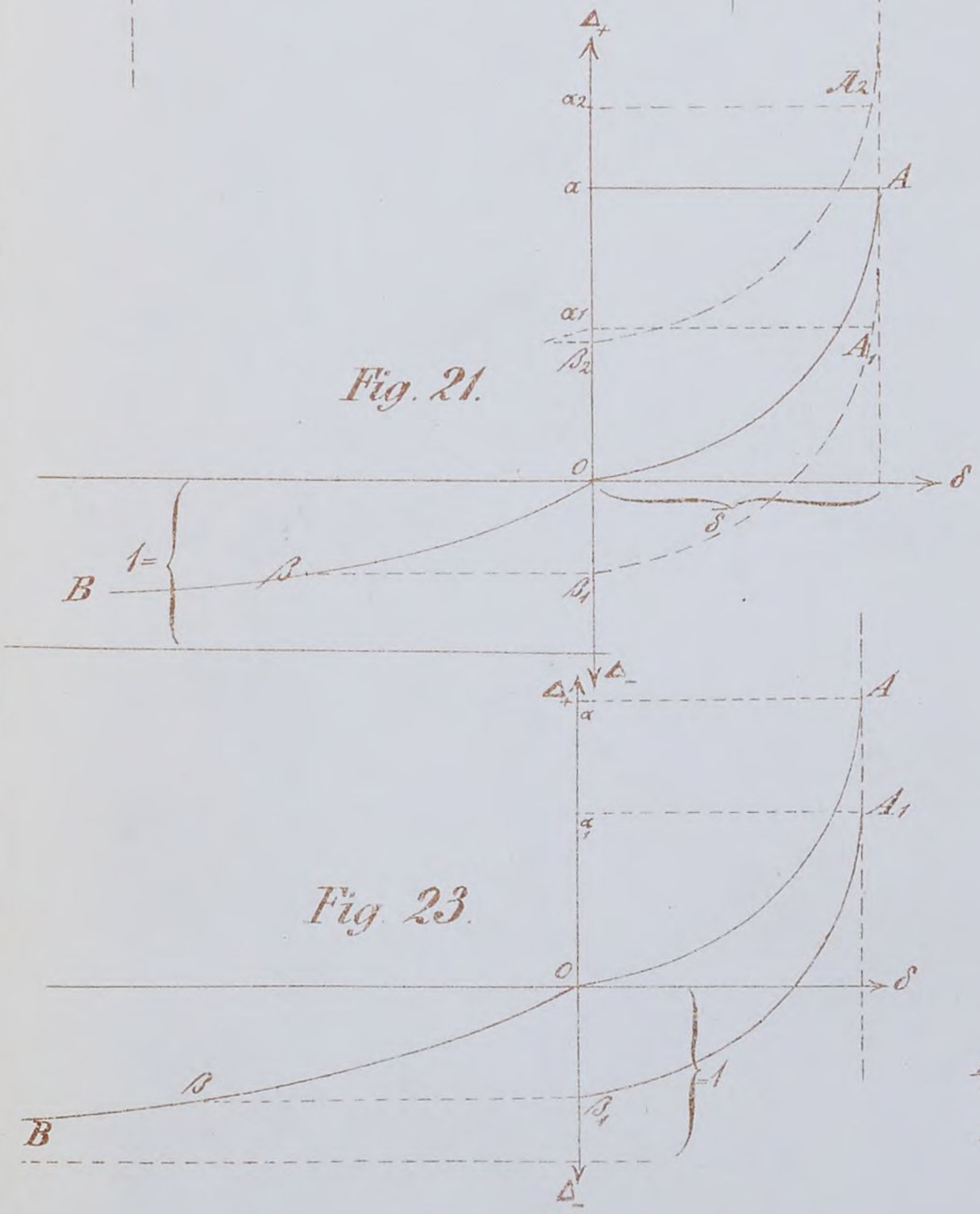


Fig. 21.

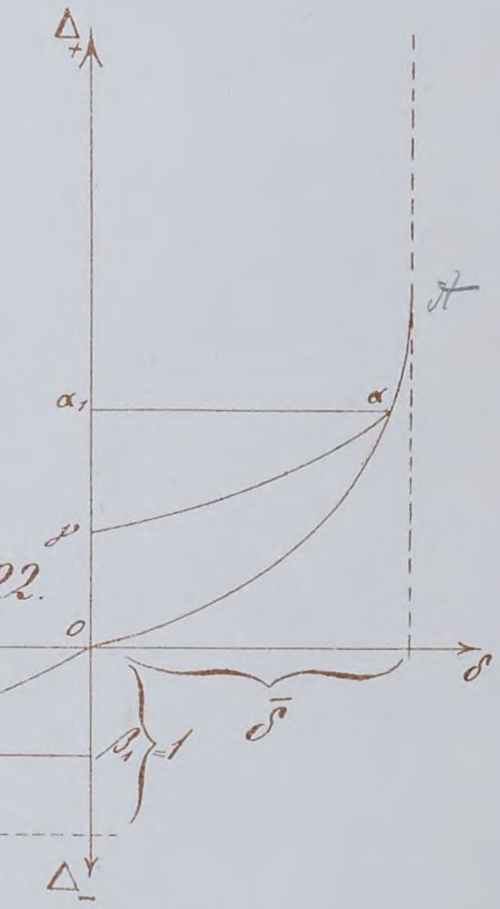


Fig. 22.

Fig. 23.

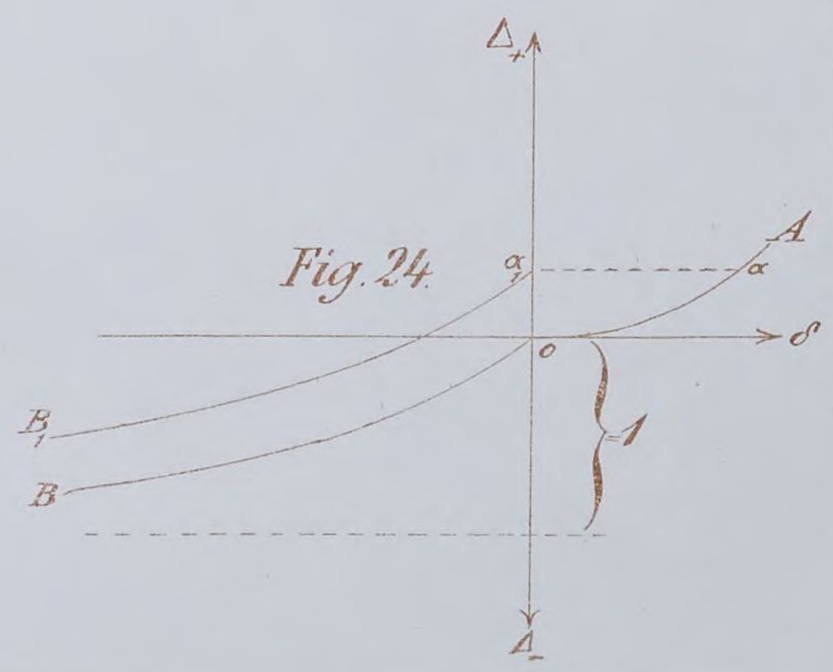


Fig. 24.

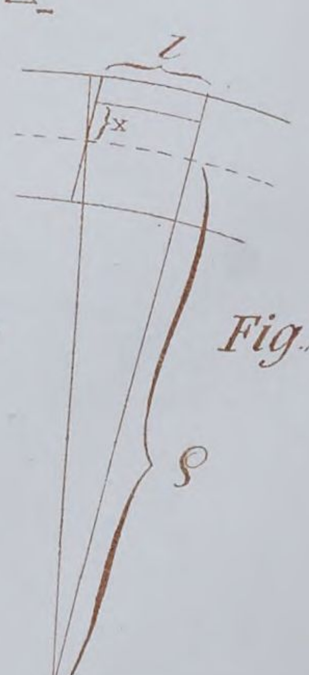
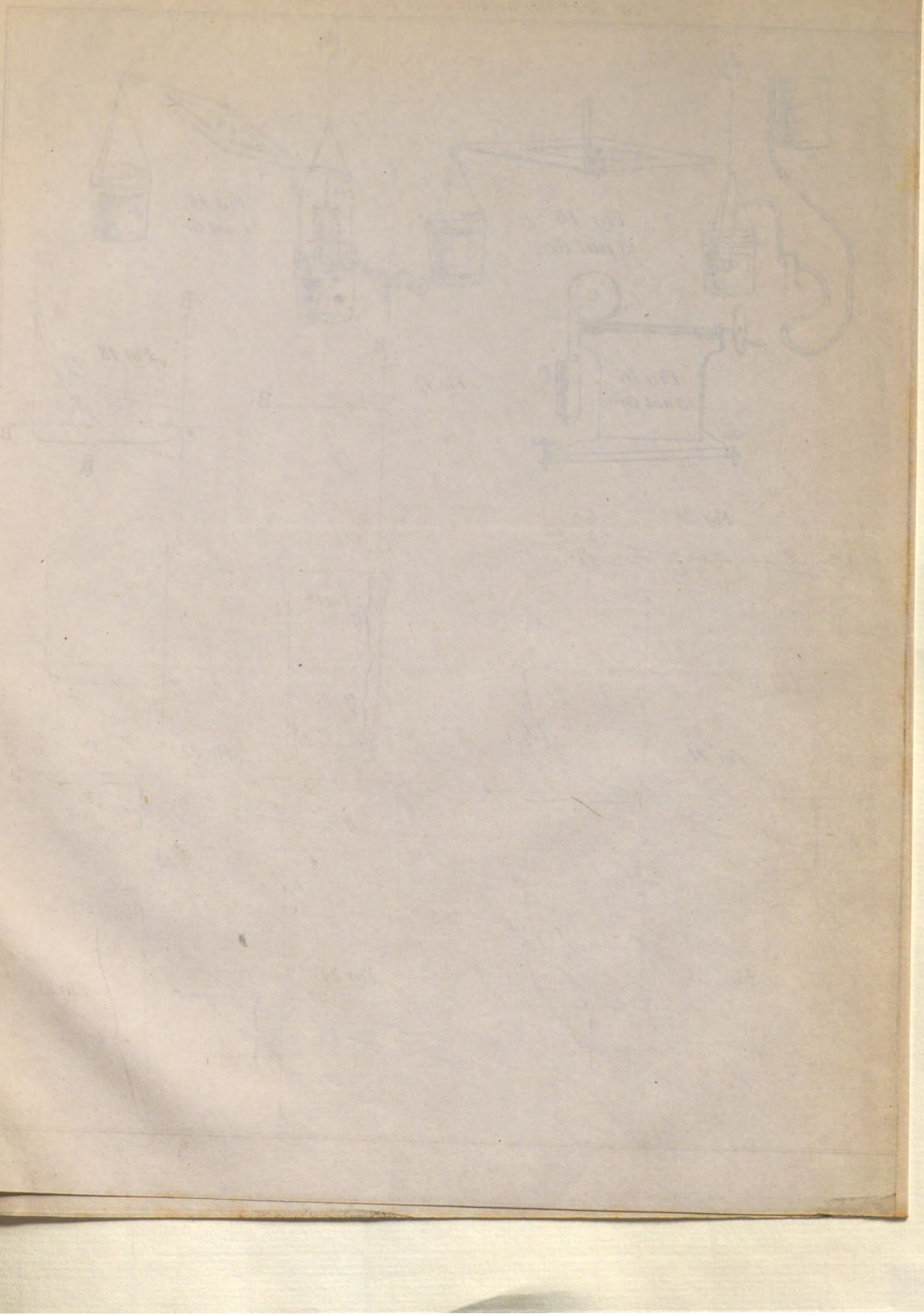


Fig. 25.



III^te Tafel
zur Anfertigung der Steinsalz-Stäbchen.

Fig. 26.

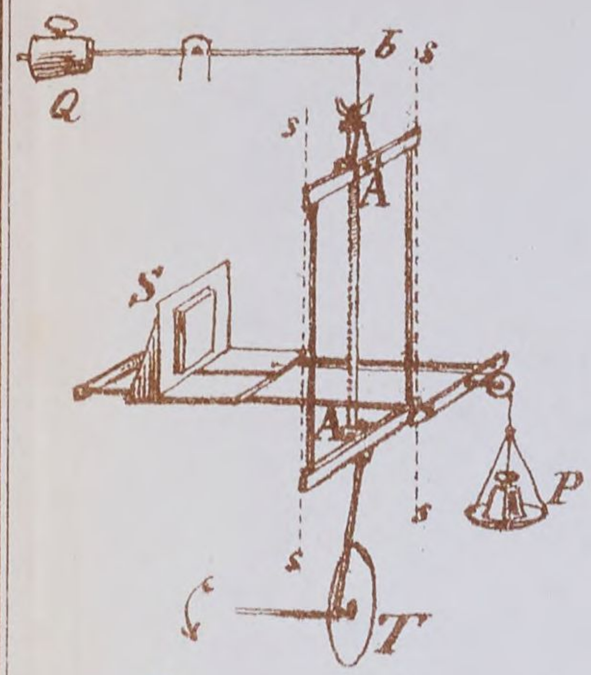


Fig. 27

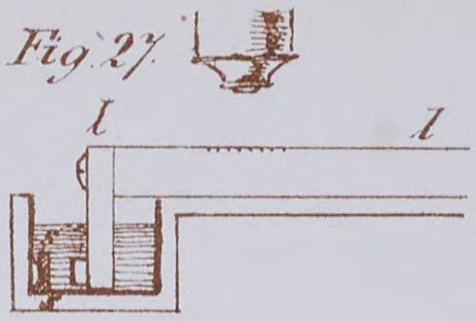


Fig. 28.

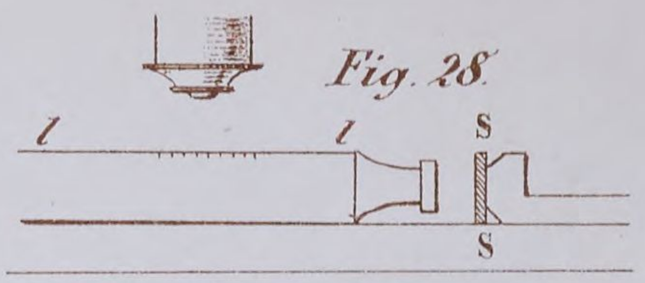


Fig. 29.

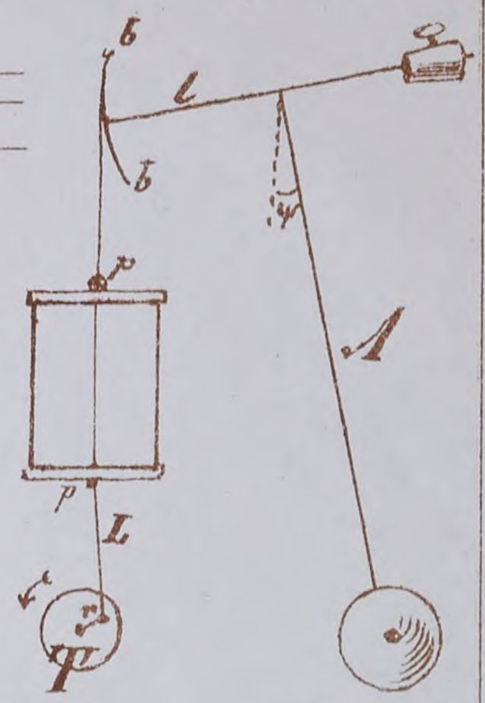
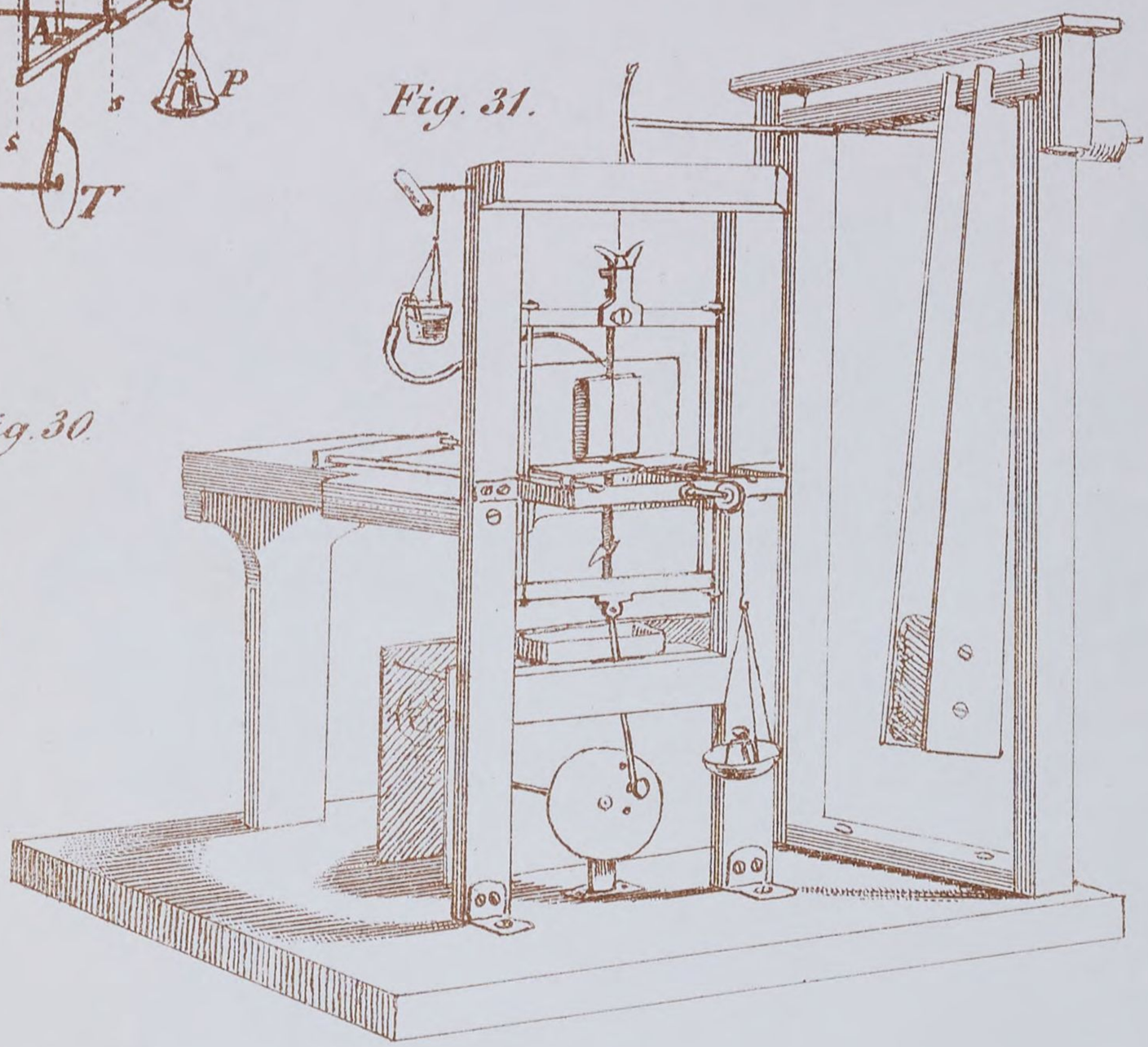


Fig. 31.



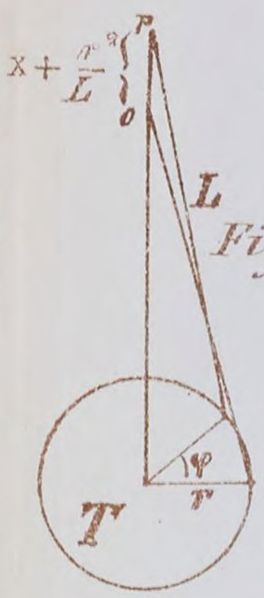


Fig. 30.

Fig. 32.

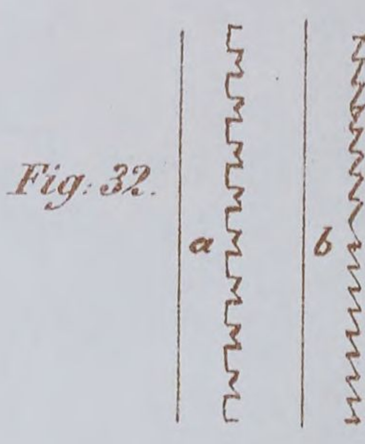


Fig. 33.

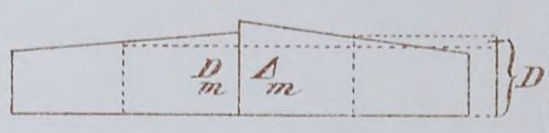


Fig. 34.

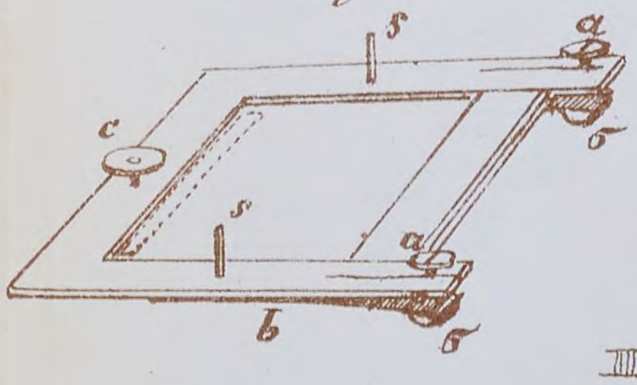


Fig. 35.

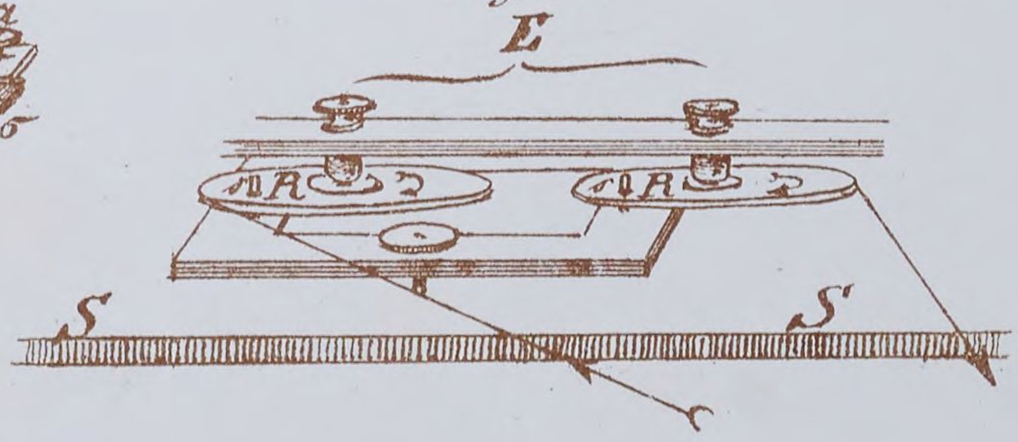
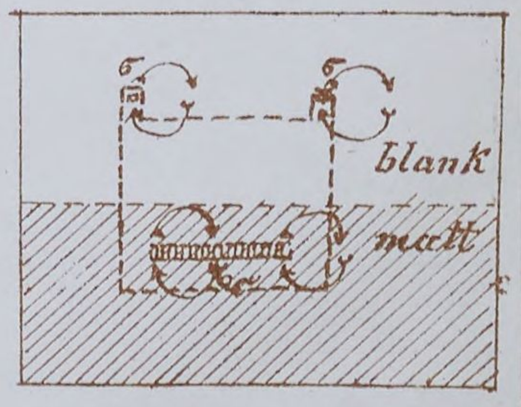


Fig. 36



BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Voigt, Woldemar,

Untersuchung der Elasticitaetsverhaeltnisse des Steinsalzes Inaugural-Dissertation aus Koenigsberg von Woldemar Voigt

Leipzig 1874
4 Lith. 181 t
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11179141-7